Н. Извольский

МЕТОДИКА ГЕОМЕТРИИ

Допущено Государственным Ученым Советом
13-го июня 1923 г.



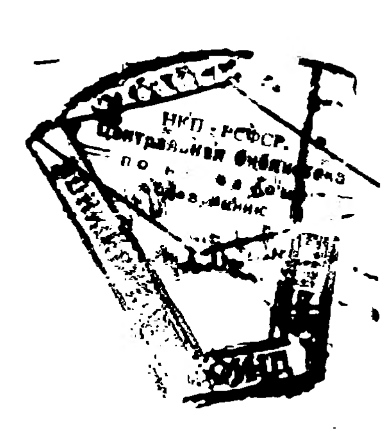
ПЕТЕРБУРГ
ИЗДАТЕЛЬСТВО БРОКГАУЗ-ЕФРОН
1924

Н. Извольский

МЕТОДИКА ГЕОМЕТРИИ

Допущено Государственным Ученым Советом
13-го июня 1923 г.





ПЕТЕРБУРГ
ИЗДАТЕЛЬСТВО БРОКГАУЗ-ЕФРОН
1924

Печатается с согласия Госиздата

Склад издания: „Центральный книжный склад профессиональных союзов железнодорожников и водников“ (б. Цектран).

Москва, Ильинка, Козьмодемиановский переул., 5.
Петроград, Проспект Володарского, 53.
Харьков, Московская, 23.

Типография Издательства Брокгауз-Ефрон. Петроград, Прачешный пер., 6.

Петрооблит № 11041. Тираж 10000 экз.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем сочинении мне приходится выступить с критикою многих воззрений, которые имеют место на вопросы методики геометрии у современников. Критика сводится, в сущности, к двум основным пунктам: 1) приходится протестовать против широко распространенного обыкновения разучивать „доказательства“ взамен разучивания самой геометрии; 2) приходится остановить внимание читателей, что то новое течение в области методики геометрии, которое требует введения так называемого пропедевтического, курса геометрии, где бы маленькие учащиеся знакомились опытным путем с рядом геометрических свойств, стоит на ложном пути: опыт не является тем средством, которым совершается и совершалось накопление геометрических знаний, и в этом пропедевтическом курсе, образцы которого мы имеем в ряде вышедших за последние годы учебников (Астряб, Кулишер, Маркус, Гебель по Горнбруку и др.), обучение геометрии велось бы, в сущности, методом, уже давно осужденным. В самом деле, если на протяжении всего курса учащимся предлагают проделать целый ряд опытов (вроде: возьми циркулем такой-то отрезок и сравни его с таким-то, — убедись из этого, что первый отрезок в 2 раза меньше второго; или: вырежь из бумаги такие-то треугольники, наложи их один на другой и убедись, что они равны и т. п.), из которых учащиеся должны убедиться в справедливости того или иного геометрического предложения, то ведь в конце концов дело здесь сводится к тому, что учащимся просто предлагают запомнить целый ряд положений, а опыты, здесь рекомендуемые, являются лишь мнемоническим средством.

Те воззрения, какие проводятся в настоящем сочинении, явились для меня результатом многолетней моей практической работы, которая заставляла вдумываться в целый ряд вопросов, задавае-

мых практикою. Конечно, я имел предшественников. Уже давно под влиянием неудовлетворенности результатами обучения геометрии, началось искание новых путей. И если, в общем, как указано выше, педагогическая мысль встала на ложный путь, то в работах отдельных лиц, хотя бы затем и уклонившихся на тот же ложный путь, можно встретить целый ряд мыслей, близких к тем, которые развиваются мною в настоящем сочинении. Укажу, напр., на имена: Борель, Симон, Ройтман (предисловие к его курсу геометрии заслуживает большого внимания), Шохор-Троцкий и др.

Особенно мне приходится обратить внимание на книгу французского математика-философа Анри Пуанкаре — „Наука и метод". Эта книга помогла мне привести в отчетливость те мысли по поводу преподавания геометрии, которые до чтения этой книги были недостаточно оформлены.

Я знаю; привычка к обычному взгляду на преподавание геометрии настолько укоренилась среди преподавателей математики, что нет надежды в ближайшем будущем рассчитывать на радикальное изменение дела обучения геометрии, — для этого мало тех докладов, тех лекций, которые мне неоднократно приходилось читать, тех статей, какие мне приходилось писать, и, наконец, факта появления в печати настоящей книги. Для этого надо, чтобы еще целый ряд педагогов-математиков, ищущих новых путей, примкнул к тому направлению, какое развивается в настоящей книге. Пусть появится целый ряд новых работ, — тогда, в будущем, явится надежда на обновление дела обучения геометрии.

Н. Извольский.

I. Общие методические соображения.

1. О взгляде на геометрию, как на логическую систему.

В основу построения методики геометрии должно прежде всего положить определенный взгляд на самый предмет геометрии — руководящий взгляд: исходя из него, явится возможным установить и основные пункты методики; опираясь на него, можно развить и детальный план обучения в каждой школе; в нем можно найти указания и на те средства, которыми должно пользоваться для развития геометрического содержания курса; он, наконец, явится опорою для преподавателя во время его работы в классе.

Уже благодаря „Началам“ Евклида, составился взгляд на геометрию, как на логическую систему, в основе которой заложен ряд постулатов, а содержание которой состоит из ряда предложений (теорем), выводимых из основных постулатов и из предыдущих предложений средствами формальной логики. За последнее время ряд работ в этом направлении привел к построению нескольких систем. Одна из таких систем построена Д. Гильбертом в его знаменитых „Grundlagen der Geometrie“. Уже самое начало этой книги („мы мыслим три различных системы объектов: объекты первой системы мы называем точками ..., второй — прямыми ... и третьей — плоскостями“) ясно выражает желание автора отказаться от всякого образного представления этих „объектов“ трех систем и свести все дело к формальной логике. Вопросы: удалось ли это? И может ли вообще это удаться? — остаются открытыми. И в сочинении Анри Пуанкаре (см. русский перевод: Г. Пуанкаре — „Наука и метод“) можно найти выражение больших сомнений в возможности выполнения такой задачи. Вот выписка из „Науки и метод“: „Он (Гильберт) хотел довести до minimum'a число основных аксиом геометрии и перечислить их все без остатка.

Но в тех суждениях, в которых наш ум обнаруживает активность, в которых интуиция еще играет роль, трудно отделаться от внесения постулата или аксиомы, которые незаметно входят в суждение. Лишь в случае, если бы все геометрические суждения приняли чисто-механическую форму, Гильберт мог бы быть уверенным в том, что он исполнил свое намерение и успешно закончил свою задачу". Остановимся на одном месте этой выписки: „трудно отделаться от постулата или аксиомы, которые незаметно входят в суждение". И сразу же, с первых слов книги Гильберта, выясняется та почва, где такое внесение может иметь место. „Мы мыслим три системы объектов: объекты первой называются точками и обозначаются буквами *A*, *B*, *C*... и т. д." Раз мы мыслим, то уже значит, что мы признаем их существование, независимое от всего дальнейшего, что̀ имеет место в книге Гильберта. Уже это обстоятельство позволяет думать, что здесь имеет место интуиция, и она не может не отразиться на всем последующем. А далее: мы мыслим три системы объектов — стало быть, мы умеем как-то различать объекты одной системы от объектов другой, от объектов третьей. Так как дальнейшее развитие геометрии Гильберта все время отделяет объекты этих трех систем, то еще более усиливается уверенность, что Гильберт опирается в развитии содержания своей геометрии не только на свои постулаты, но и на нечто иное, что позволяет ему отличать объекты разных систем. Это „нечто иное", конечно, сводится к интуиции и является тою почвою, на которой нельзя обойтись без внесения неуловимых новых постулатов и аксиом, и, может быть, их число бесконечно велико.

Однако, задача сведения всего содержания геометрии в логическую систему может быть поставлена и до тех пор, пока не будет доказано, что число постулатов, нужных для этого, бесконечно велико (Анри Пуанкаре делает в этом направлении некоторые, но еще не достаточные шаги); работа в этом направлении должна быть признана имеющей право на существование, и эта работа должна быть полна интереса для тех специалистов-математиков, которые 1) верят в конечность числа аксиом, нужных для формального обоснования геометрии и 2) работают именно в этом направлении. Но не является ли преступлением по отно-

шению к тем молодым математическим силам, которые хотят работать в ином, более материальном, направлении, заставлять их штудировать ряды томов, посвященных этим схоластико-формальным изысканиям? А еще бо̀льшим преступлением явится введение такого направления геометрии в школу, хотя бы даже в старшие классы средней школы. Нет, с таким взглядом педагогу делать нечего и направлять им дело обучения геометрии он не может и не должен.

А на всякие возражения против предыдущих соображений для математика-педагога есть еще один аргумент: пусть система Гильберта безукоризнена, пусть, если это не удалось Гильберту или Веронезе, удастся в будущем кому-либо другому построить безукоризненную логическую систему геометрии, но все же должно признать, что такая работа есть работа лишь по приведению в систему геометрических знаний, но приобретение этих знаний ведь совершалось иным путем, где и интуиция и логика играли равноправные роли лишь орудий для изысканий, но ни одно из них не являлось целью. И обучение геометрии должно итти по тому пути, по которому шло накопление геометрических знаний, а не по тому пути, на который вступили желающие привести эти знания в формально логическую систему.

2. Традиционная система преподавания и ее результаты.

Та система преподавания геометрии, которая обычно имеет место в нашей средней школе и направляется учебниками типа А. Давыдова, А. Киселева и т. п., отчасти отразила в себе вышеизложенный взгляд на геометрию, как на логическую систему, но отразило крайне искаженно: логическая с и с т е м а, в сущности, отсутствует, но логика в форме ряда силлогизмов имеется налицо. Достаточно указать лишь один пример, чтобы понять, что в нашем традиционном курсе о „системе" не может быть и речи: напр., тщательно доказывается, что диагонали параллелограмма взаимно делятся пополам, но не дается доказательства, что эти диагонали пересекаются в н у т р и параллелограмма, да и не дается руководящей нити, как это доказать (да и возможно ли

это?). Вся суть нашего традиционного курса геометрии сводится к разучиванию доказательств ряда теорем: сперва объявляется теорема, затем она доказывается, после чего следует классическое „что и требовалось доказать". Методические работы по геометрии (см., напр., характерную в этом отношении книгу Юнг — „Как преподавать математику") сводятся в огромном большинстве случаев к изысканию более удобных для классного изложения, более простых для запоминания доказательств и к рассуждениям о ценности различных доказательств. Мало того, укрепившийся за последнее время принцип наглядности повел по отношению курса средней школы к изготовлению ряда пособий, иллюстрирующих также... доказательства теорем. Нет ничего удивительного, что под влиянием такой постановки дела преподавания геометрии у учащихся в средней школе слагается взгляд на геометрию, как на собрание ряда теорем, неизвестно почему или зачем появившихся, причем к этому присоединяется еще (неприятная — для многих) обязанность доказывать эти теоремы.

Неудивительно это потому, что при обычном ходе преподавания ни учебник, ни преподаватель не делают ничего, чтобы так или иначе осветить вопрос о происхождении теорем. И только в редких случаях мы имеем исключение: некоторые преподаватели в той или другой форме выдвигают на видное место вопрос о происхождении теорем, и тогда для учащихся у этого преподавателя курс геометрии принимает иной характер и перестает быть только собранием теорем. А иногда некоторые из учащихся, независимо и от учебника и от преподавателя, сами полусознательно приходят к представлению или к мысли о том, что такая-то теорема появилась не потому, что этого захотел автор учебника или преподаватель, а потому, что она служит ответом на вопрос, естественно возникший во время предыдущей работы. И для таких учеников (это, может быть, самые способные и не только „к математике", но и вообще) геометрия принимает характер, существенно отличный от вышеуказанного: геометрия сводится к ряду изысканий, имеющих целью найти ответы на ряд вопросов, естественно возникающих по мере течения геометрической работы, вопросов, которые следуют друг за другом и образуют как бы цепь, разветвленную в ее многих местах.

3. Взгляд на геометрию, как на систему изысканий, имеющих целью найти ответы на последовательно возникающие вопросы.

Наиболее продуктивным для педагогических целей следует считать взгляд на геометрию, намеченный, хотя и кратко, в вышеупомянаемом мемуаре А. Пуанкаре—„Наука и метод"; этот взгляд является объединяющим для всех наук, придавая им характер изысканий в области комбинаций, которые, постепенно усложняясь, создаются каждой наукой из материала, относящегося к ее ведению.

Каждая наука отбирает в свое ведение ряд фактов, которые составляют тот материал, над которым наука производит свою работу. Происходит как бы отбор фактов: такой-то факт известная наука берет в свое ведение, а другой отбрасывает, как не подлежащий ее компетенции. Так, факт существования какой-либо звезды берет в свое ведение астрономия, те события, какие имеют место в России в настоящее время (1918 г.) возьмет в свое ведение история и т. д. и т. д. Иногда удается более или менее удачно общими словами охарактеризовать тот материал, который принадлежит ведению известной науки. Например, механику определяют, как науку о движении, указывая этим, что к ведению механики относятся факты, так или иначе связанные с движением. Иногда, наоборот, бывает чрезвычайно трудно выделить при помощи общего определения тот материал, который относится к ведению известной науки. Например, мы знаем, что чрезвычайно трудно отделить те факты, которые относятся к области физики, от тех, которые относятся к химии.

Каждая наука на разных стадиях своего развития стремится классифицировать свой материал; иногда эта классификация происходит уже на первых стадиях развития науки, иногда—лишь на последующих. При этом всегда имеет место стремление из всего материала, которым наука в данный момент владеет, выделить тот, который по тем или иным признакам признается нами за простейший. Вспомним стремление химии выделять те эле-

менты, которые не удалось разложить на другие и которые называются простыми.

Содержание главной работы, при помощи которой происходит развитие науки, во всех науках сводится к изучению различных комбинаций из материала этой науки, причем эти комбинации либо берутся, как отдельные факты, в готовом виде, либо искусственно составляются в связи с известною руководящею мыслью или определенною целью. Это изучение приводит к открытию ряда особенностей каждой комбинации, из которых одни более, а другие менее привлекают наше внимание. Если у ряда комбинаций удается подметить аналогичные особенности, то это обстоятельство ведет к установлению закона для этой науки. Если когда-то, очень давно, обратила на себя внимание особенность комбинации, получаемой от трения палочки смолы о мех, особенность, состоящая в том, что после этого смола начинает притягивать легкие тела, то эта особенность послужила исходным пунктом для изучения ряда других комбинаций, особенности которых заставили построить целый ряд новых комбинаций и т. д., и в результате мы теперь имеем учение об электричестве с целым рядом законов.

Развитие математики, а в частности геометрии, должно было совершаться таким же путем. За исходный пункт числовой ветви математики (арифметика, алгебра, анализ) следует признать тот факт, что человек умеет выделять из всего окружающего г р у п п ы предметов. Под влиянием этого факта были созданы числа, сначала целые, а затем, по мере развития работы, дробные, относительные и т. д., и эти числа являются тем материалом, над которым работает числовая ветвь математики.

За исходный пункт геометрии следует признать тот факт, что мы всюду вокруг себя видим различные границы: вот облако на синем небе — мы видим границу между небом и облаком; вот линия горизонта — она нам представляется границею между небом и землею; вот стена — и мы видим границу между нею и внутренностью комнаты и т. д. и т. д.

Ориентируясь в этом факте, мы приходим к заключению, что можно все наблюдаемые нами границы разделить на 3 категории, разницу между которыми трудно выразить словами, но легко

подметить эту разницу, если станем показывать различные границы: в одних случаях придется делать движение всею ладонью руки, как бы мазать, в других—делать движения лишь пальцем — обводить и в третьих случаях придется лишь указывать. После внимательного рассмотрения разных наблюдаемых границ, мы приходим к убеждению, что иного сорта границ не существует (точнее: мы не наблюдаем). Далее, рядом опытов, рядом попыток мы приходим к убеждению, что отделить эти границы от предметов нельзя, что эти границы, хотя мы их и видим, самостоятельного материального существования не имеют. Однако, это обстоятельство не может помешать нашему воображению представлять их так, как будто они отдельно существуют, и не может помешать нашему мышлению мыслить об них, как о существующих отдельно. Раз этот акт выполнен нашим сознанием, то этим самым наше сознание создало нематериальные границы трех видов, и мы называем их поверхностями, линиями и точками. Эти нематериальные, геометрические, поверхности, линии и точки и являются тем материалом, над которым работает геометрия.

Возникает потребность разобраться в этом материале: нельзя ли выделить из него какие-либо элементы, которые по некоторым признакам могли бы быть признаны за простейший материал. Придется при этом, конечно, руководиться лишь представлениями, которые возникают на почве наблюдения и опыта, так как иного критерия в нашем распоряжении еще не имеется. И прежде всего эти представления заставляют нас признать, что все точки сходны между собою — среди них выбирать простейших не приходится. Среди линий — указывают нам те же представления — имеется большое разнообразие, и мы можем поставить задачу об изыскании линий, которые по каким-либо признакам можно было бы признать за простейшие. Наилучшим средством для решения этого вопроса является опыт вращения проволоки, закрепленной в двух местах (точках). Этот опыт говорит нам, что если мы вообразим через две точки какую-либо линию, то таких же линий мы можем через эти 2 точки вообразить бесконечно много. Однако, этот опыт говорит нам и о том, что может выйти случай, что линия при ее вращении вокруг двух точек не меняет своего

положения. Это значит, что мы можем вообразить, можем мыслить особую линию, положение которой определяется двумя точками. Этот признак достаточен, чтобы признать ее за самую простую линию, чтобы назвать ее особым именем — прямая линия, и чтобы наделить ее особым свойством, отличающим ее от других: через 2 точки можно вообразить лишь одну прямую линию.

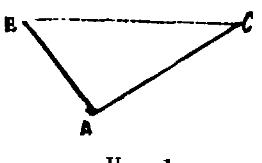
Становится на очередь следующая задача: выделить, если удастся, среди поверхностей такие, которые по известным признакам могли бы быть сочтены за простейшие. К решению ее можно подойти двояко: 1) при помощи известного опыта прикладывания к поверхности стола, стены и т. п. ребра линейки, обрезанного по прямой линии (ею уже можно пользоваться), с целью увидать промежутки между испытуемой поверхностью и ребром линейки — под влиянием этих опытов возникает мысль о возможности признать существование поверхности, на которой прямая линия укладывается всюду, и как бы ее ни положили, без промежутков; 2) при помощи образования поверхности посредством движения прямой линии — если прямая a движется так, что всегда проходит через точку M и всегда встречает прямую m (не проходящую через точку M), то прямая a описывает особую поверхность, которую мы можем признать за самую простую (не вкладывая в это слово „простую" ничего более, как только то, что способ образования этой поверхности нам очень ясен). Оба приема позволят признать полученные поверхности существующими, дать им особое имя — плоские поверхности — и наделить их свойствами: при первом приеме само собою выясняется, что всякая прямая совпадает с плоскостью, если имеет с ней две общих точки, а при втором непосредственно выяснятся, что прямая и точка вне ее определяют положение плоскости. Конечно, в свое время должен быть решен вопрос, тождественны ли те поверхности, которые являются результатами этих двух определений. С точки зрения методики не следует поэтому вводить сразу оба приема для выделения из множества поверхностей особой, плоскости, так как вряд ли возможно сейчас же поставить естественно возникающий из сопоставления обоих приемов вопрос на разрешение.

Комбинационная работа, благодаря которой развивается содержание геометрии, должна начаться с рассмотрения наиболее

простых комбинаций. Комбинируем самую простую линию, прямую, и точку. Если мы вообразим (построим) как-нибудь прямую линию и как-нибудь точку, то в этой комбинации мы не замечаем ничего особенного до тех пор, пока точка не будет взята на прямой линии. Тогда мы подметим некоторую особенность: прямая разделилась на 2 части, каждая часть идет от точки без конца. Эта особенность требует лишь введения новых названий: каждую часть называем л у ч е м. Возникает вопрос: не будет ли в какой-нибудь момент чего-либо еще особенного, если точка станет передвигаться по этой прямой? Представив себе это перемещение точки, отвечаем: нет, ничего нового не будет — всякий раз будет получаться 2 луча. Тогда усложним комбинацию: возьмем прямую и на ней 2 точки. В этой комбинации мы, кроме двух лучей, замечаем еще новое: прямая разделилась на 3 части, две из которых суть лучи, а третья часть идет от точки до другой точки; эту третью часть мы называем опять новым именем — „прямолинейный отрезок" или просто „отрезок". Станем 2 точки перемещать по прямой: в одном или в противоположных направлениях, навстречу друг другу или обратно, — мы представляем, что чего-либо нового, чего-либо особенного здесь ни в один момент не будет: всякий раз будут получаться те же 3 части. Тогда является мысль построить комбинацию, обратную (в известном смысле слова) рассмотренной: здесь были скомбинированы одна прямая и н а н е й 2 точки; возьмем теперь одну точку и ч е р е з н е е 2 прямых. Полученная комбинация обладает известною симметриею и, благодаря этому, возникает мысль сначала рессмотреть более простую комбинацию: точку и из нее два луча — даем ей название „угол". Подобно тому, как выше мы передвигали 2 точки по прямой, теперь станем вращать лучи вокруг точки, и, в противоположность предыдущему, здесь наступает момент, когда замечается особенность: в известный момент оба луча расположатся по прямой линии. Комбинация по своему составу осталась такою же: точка и из нее 2 луча; поэтому должно ей оставить прежнее название „угол", но у нее есть особенность: лучи расположены по одной прямой; поэтому это — особенный угол, в ы п р я м л е н н ы й или р а з в е р н у т ы й.

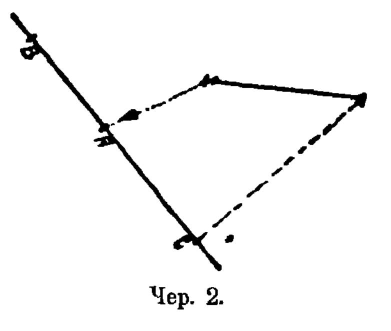
Тот факт, что среди углов есть особенный угол, чрезвычайно важен для геометрии. Отсюда, между прочим, вытекает то обстоятельство, что для отрезков нет абсолютной единицы — меры, а для углов есть. Возможно, но это для педагогической стороны дела менее удобно, за основной особенный угол принять „полный“ угол: при вращении один луч, описав полный оборот, совпадает с другим.

Далее возникает потребность комбинировать между собою уже образованные комбинации: отрезки между собою и углы между собою. Здесь, так или иначе, должна возникнуть мысль о сближении с арифметикой, и мы находим возможным применять к отрезкам, а также к углам, понятие „столько же, больше и меньше“, понятие о сложении и вычитании отрезков и углов. Относительно отрезков дело чрезвычайно просто, и мы остановимся здесь лишь на одном моменте. Сложение чисел в арифметике появилось, как отражение процесса „сдвижения“ двух групп предметов: из двух групп образуется одна. Аналогично этому возникает возможность сдвижения двух отрезков, чтобы из двух отрезков получился один. Это слово „получился“ можно понимать и в более широком смысле: чтобы двумя отрезками определился один. И если мы „сдвинем“ два отрезка так, как на черт. 1, то мы увидим, что „сдвинутые“ (сближенные) отрезки AB и AC даже и в данном на чертеже расположении определяют новый отрезок BC. Мы можем хотя бы один из этих отрезков вращать около точки A, и определяемый отрезок BC будет все время оставаться, хотя и будет деформироваться; мы можем, наконец, остановиться и на том особенном расположении, когда точки B, A и C расположатся на одной прямой, и принять этот случай за наиболее удобный и наиболее простой (здесь получается не какая-либо новая комбинация — фигура, как на чертеже, а прежняя). Вопрос, какое именно расположение сдвигаемых отрезков выбрать за расположение, определяющее их сумму, зависит от того, как мы можем перемещать отрезок в пространстве, чтобы считать, что при этом перемеще-

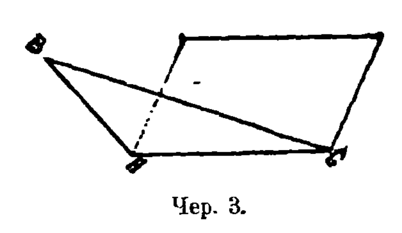


Чер. 1.

нии он оставался бы равным самому себе. И мы знаем различные отношения к этому вопросу: если, например, мы признаем, что отрезок остается равным самому себе, как бы он в пространстве ни перемещался, то мы выбираем из предыдущего определения суммы такой случай, какой нам представляется наиболее удобным и простым (чер. 2): к отрезку AB придвинут другой отрезок так, чтобы один его конец совпал с точкою A, а другой попал бы в какую-либо точку C, лежащую на одной прямой с B и A; если мы признаем, что направление отрезка существенно и что отрезок остается равным симому себе лишь тогда, когда он перемещается параллельно самому себе, то мы принуждены при выполнении сложения отрезков ограничиться только этим параллельным перенесением (чер. 3): к отрезку AB придвинут другой отрезок так, что новое положение AC параллельно первоначальному. Первым способом мы пользуемся в геометрии, а вторым в теории векторов.



Чер. 2.

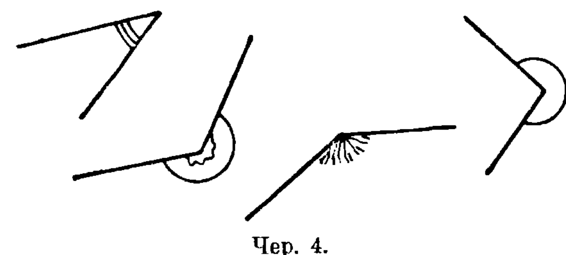


Чер. 3.

По отношению к углам возникает затруднение: мы, повидимому, не можем, рассматривая угол, лишь как комбинацию „точка и из нее два луча“, и не присоединяя к нему еще чего-либо, ни выполнять сравнения углов, ни выполнять действий над углами. Является надобность присоединить к углу еще что-либо, и поводом для этого является то обстоятельство, что мы всегда можем рассматривать угол расположенным на плоскости и что эта плоскость делится углом на 2 области. Присоединим одну из них к углу, какую именно — безразлично, так как нет непосредственных признаков, как-либо отличающих одну от другой. Эту присоединенную к углу область называют внутреннею областью угла (она лежит „внутри“ угла), а другую назыв. внешнею (она ле-

жит „вне“ угла[1]). Внутреннюю область угла следует, если не сделано по этому поводу каких-либо добавочных условий, отмечать, например, как на чер. 4. В зависимости от того, какая именно область принята за внутреннюю и присоединена к углу, мы, после построения точки и из нее двух лучей, получаем 2 разных угла.

Теперь является возможность выполнять сравнение углов (т.-е. отличать равные углы и больший от меньшего), для чего имеет место способ наложения: накладывают один угол на дру-



Чер. 4.

гой, чтобы совпали их вершины и по одной их стороне и чтобы их внутренние области пошли бы друг по другу. Если построен выпрямленный угол, то сравнение двух углов, получаемых от присоединения к нему одной или другой части плоскости, показывает, что оба угла следует считать равными. Если присоединить сюда еще сравнение двух выпрямленных углов, построенных в разных местах плоскости, то явится возможным установить, что все выпрямленные углы равны, и тогда все остальные углы явится возможным разделить на 2 класса: углы, меньшие выпрямленного, и углы, большие выпрямленного. Возможно, как это обычно

[1]) D. Hilbert так смотрит на понятие угол: пусть из точки O построены на плоскости 2 луча h и k. Тогда система этих лучей h и k называется углом. Эта система (лучей h и k и точки O) все остальные точки разделяет на 2 области. Если точка A в одной области и B — в другой, то ломаная, соединяющая A и B, непременно или проходит через O или имеет общую точку с h или k. Если A и A' в одной области, то можно соединить эти точки такою ломаною, что она не проходит через O и не пересекает лучей h и k. Одна из этих областей отличается от другой лишь тем, что в одной можно взять такую пару точек, что прямолинейный отрезок, их соединяющий, пересекает h и k, а в другой таких двух точек найти нельзя. Первая называется внешнею областью угла, а вторая — внутреннею.

и делают, ограничиться на первых порах только одним из этих классов, а именно—углами, меньшими выпрямленного. Тогда вводится условие: если внутренняя область угла не обозначена каклибо (например, как это обозначалось на предыдущем чертеже), то предполагается угол, меньший выпрямленного. Нетрудно также теперь изобрести процесс сдвижения углов, который соответствовал бы действию сложения. Если ввести в дело углы, большие выпрямленного, то выполнение сложения двух, каждый из которых больше выпрямленного, углов потребует дальнейшего расширения взгляда на угол, а именно, введения углов, бо́льших полного.

После введения в дело действий над углами, возникает целый ряд вопросов, ведущих к построению новых комбинаций и к изучению их особенностей. Тот факт, что при сложении двух углов явится возможность случая, когда получаемая сумма есть выпрямленный угол, ведет к понятию о смежных углах.

Задача „дополнить данный угол до выпрямленного“, которая может быть решена двумя приемами (продолжить или одну сторону или другую данного угла), ведет к изучению фигуры, какую мы уже построили, а именно—к комбинации, состоящей из точки и двух прямых, проходящих через эту точку. Здесь по[illegible] особенность, которая, после введения термина „[illegible]ы углы“, формулируется предложением: „вертикальные углы равны между собою“. Это предложение является первою теоремою.

Теперь ясен тот путь, который поведет к происхождению других теорем; в дальнейшем придется разучивать новые, быть может, более сложные комбинации, построенные согласно какому-либо естественно возникшему вопросу, либо согласно намеченной цели; если при этом разучивании удастся подметить какую-либо особенность, какую мы признаем и интересною и существенною, то эту особенность мы запечатлеваем в словесной форме,—таким образом получается ряд теорем геометрии.

Мы остановились на комбинации, состоящей из точки и двух прямых, через нее проходящих. Здесь возникают две руководящих мысли для продолжения работы: 1) до сих пор мы имели дело лишь с прямыми пересекающимися; возникает вопрос: нельзя ли получить две прямых, вовсе не пересекающихся? Этот вопрос ведет к учению о параллельных прямых. 2) Мы рассмотрели

комбинацию, состоящую из двух пересекающихся прямых; усложним ее присоединением третьей прямой, — эта мысль ведет к изучению треугольников.

Возможно, в зависимости от того, как нам это больше понравится, направить дальнейшее развитие геометрических знаний и в том и в другом направлении. В дальнейшем также являются возможности направиться или в том или в другом направлении. Таким образом все содержание геометрии представится в виде ряда подмеченных особенностей, являющихся результатами работы над рядом вопросов, естественно возникающих, последовательно один за другим, но не располагающихся в одну непрерывную цепь, а располагающихся, скорее, в форме скелета дерева (ствол, суки и ряд ветвей).

Следует отбросить взгляд на геометрию, как на цепь необходимых логических заключений. Логика прежде всего не есть цель геометрии; логика является лишь орудием, и не единственным, для приобретения геометрических знаний. Роль логики двоякая: 1) она принимает участие в постановке тех вопросов и в установлении тех целей, которые ведут и к построению новых комбинаций и к изучению их; 2) она принимает участие и в изыскании ответов на поставленные вопросы и в той работе, благодаря которой удается подметить особенности разучиваемых комбинаций.

Пусть этот взгляд на развитие содержания геометрии не отражает в большой мере исторический ход этого развития, но зато этот взгляд является ответом на естественный вопрос: как могло бы быть объяснено развитие содержания геометрии? Для преподавания геометрии иметь такой взгляд на предмет преподавания является чрезвычайно ценным, и он положен в основу дальнейшего построения настоящего курса методики геометрии.

4. Средства приобретения геометрических знаний.

Из предыдущего мы видим, что основная геометрическая работа есть работа построения и изучения ряда постепенно усложняющихся комбинаций, которые возникают в согласии с известною

руководящею мыслью. Раз наше сознание признало существование линий, точек и поверхностей, то „построить известную комбинацию“ можно понимать и в том смысле, что наш разум может одновременно мыслить об элементах, составляющих эту комбинацию, или в том, что наше воображение может одновременно представлять элементы, составляющие эту комбинацию. Но этого для выполнения основной работы изучения комбинаций нам недостаточно. Необходимо для нас, по нашей природе, придать этому более материальную форму. И вот вводятся постулаты: мы умеем строить точки, строить прямые линии, строить плоскости, т.-е. мы признаем будто бы возможным осуществлять в материальной форме те элементы геометрии, которые были признаны нами самыми простыми.

Впоследствии к этому мы прибавляем еще необходимый постулат: мы умеем строить круг.

Пусть все эти постулаты — фикция. На самом деле мы не можем получить ни точек, ни прямых, ни плоскостей, ни круга, ибо они не материальны, но эта фикция необходима, без нее мы затрудняемся выполнять работу, какая предстоит при изучении комбинаций,—и эта фикция получает характер законного средства в геометрии.

К словам „мы умеем строить“ можно также отнестись различно. Греческая геометрия уже с давних пор (конечно, задолго до Евклида) для осуществления этих постулатов ввела два инструмента, циркуль и линейку, и мы теперь обычно, говоря о построениях, имеем в виду построение при помощи линейки и циркуля. Но для педагогических целей мы можем в известных случаях отнестись к этим словам и иначе, мы можем на помощь призвать и некоторые процессы (например, процесс перегибания; при построении середины отрезка возможно иногда в з я т ь этот отрезок на бумажную линейку и перегибанием ее разделить отрезок пополам, а, следовательно, получить его середину) и построение моделей из палочек, дощечек и т. п.

Теперь остановимся на словах „изучить известную комбинацию“. Построение определенной комбинации должно явиться следствием какой-либо руководящей мысли, имеющей или форму вопроса или форму достижения известной цели. Тогда может слу-

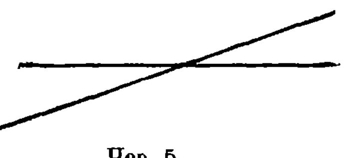
читься, что уже самый факт построения такой комбинации явится ответом на поставленный вопрос или будет свидетельствовать о возможности или невозможности достижения намеченной цели. Но часто может иметь место случай, что при получении желаемой комбинации становится ясным, что эта комбинация обладает известным свойством; на это свойство (или *на эти свойства*) нам могут указать или известная симметрия получаемой комбинации или самый процесс, при помощи которого данная комбинация получена. Напомним для примера, что при решении вопроса о дополнении данного угла до выпрямленного удается подметить возможность двоякого решения задачи, откуда становится ясным свойство вертикальных углов.

Конечно, и здесь играет некоторую роль логика: если один угол дополняет данный до выпрямленного и другой дополняет до выпрямленного, то мы делаем заключение о равенстве этих двух углов. В дальнейшем роль логики усиливается: если новая комбинация — фигура — не обладает какою-либо симметриею, если для получения ее мы не пользовались каким-либо процессом (перегибания, вращения, перемещения и т. п.), а пользовались построением циркулем и линейкою, то это построение позволяет сопоставить вновь полученную комбинацию — фигуру — с изученными ранее. Наблюдательность, отмечающая отдельные моменты построения, укажет, с какими именно уже разученными фигурами следует сопоставить новую, а логика позволит это сопоставление провести так, чтобы не притти к ложным результатам. Схема этого сопоставления такова: так как мы видим здесь такую-то знакомую фигуру, так как о ней мы знаем такое-то свойство, то для нашей новой фигуры должно иметь место „следующее“.

Мы вправе, дабы помочь своему воображению, как-либо иллюстрировать нужные процессы (подобно тому, как мы это постоянно делаем при построении циркулем и линейкою) при помощи предметов. Например, мы можем для иллюстрирования процесса перегибания плоскости взять кусок бумаги и перегибать его в соответствии с условиями, определяющими нужную нам комбинацию. И вот случается, что при такой образной иллюстрации требуемого процесса нам сразу становится ясным какое-либо свойство для изучаемой комбинации, становится ясным *непре-*

ложность и всеобщая необходимость этого свойства при соответствующих условиях. Здесь имеет место та наша способность, которая носит название „интуиция“.

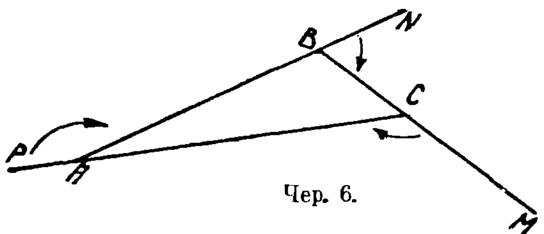
Вопрос, что такое интуиция, не так просто решается, и иногда этим именем называют нечто иное, а именно—простое физическое зрение, а также неуясненный до отчетливости жизненный опыт. Так, при начальном обучении геометрии часто вводят в дело прямой угол, не уяснив его происхождение, и учащихся „на глаз“ заставляют определять, получился ли или нет прямой угол. И если учащийся, рассматривая нарисованный квадрат, установит, что у него все углы прямые, то здесь интуиции нет. Здесь имеет место только физическое зрение учащихся и жизненный опыт, хотя бы и маленький, уже приучивший несколько учащихся к тому виду углов, которые в большом числе встречаются в окружающей обстановке — ведь плотники, столяры и т. д. стремятся в своих работах использовать прямые углы. Интуиция здесь могла бы иметь место лишь тогда, когда был бы, с одной стороны, выяснен процесс, приведший к образованию понятия о прямом угле, а с другой стороны, для получения квадрата был бы придуман процесс (или построение), который так осветил бы вопрос об углах квадрата, что сделалась бы сразу ясной неизбежность того, что всегда (а не только у того квадрата, который мы видим нарисованным, либо, как грань деревянного куба) углы квадрата должны быть прямыми. Наилучшее пояснение понятия „интуиция“ дает арифметика: из образного представления умножения чисел 4 и 3 (см. прилагаемый чертеж) нам ясно не только то, что $4 \times 3 = 3 \times 4$, но и что подобную же группу предметов мы можем составить для любых двух чисел, и ясна непреложность переместительного закона умножения ($ab = ba$). На границе между физическим зрением и интуицией стоит свойство: две прямые пересекаются лишь в одной точке (чер. 5); всякий чертеж пересекающихся прямых дает, в сущности, возможность видеть много общих точек у нарисованных прямых, но нам ясно, что должно считать лишь одну общую точку.



Чер. 5.

Бывают, однако, случаи, когда физическое зрение как бы заменяет интуицию. Так, объем треугольной призмы должно рассматривать, как сумму объемов трех треугольных пирамид, полученных при помощи определенных сечений; площадь параллелограмма равна площади прямоугольника, получаемого от перенесения части этой площади с одной стороны на другую и т. п.

Так как во многих случаях, чтобы вызвать деятельность интуиции, нам приходится пользоваться образным воспроизведением какого-либо процесса, то это обстоятельство дает повод смешивать интуицию с опытом. Опыт может дать толчок для деятельности интуиции, но интуиция отнюдь не сводится только к опыту. Если, например, выполнить опыт сложения трех внутренних углов треугольника, начерченного на бумаге, либо вырезанного из бумаги (в учебниках „наглядных“ геометрий часто рекомендуют это делать), то здесь имеет место опыт, и этот опыт отнюдь не покажет обязательность того, чтобы сумма углов треугольника равнялась двум прямым углам или выпрямленному углу. Этот опыт может лишь показать, что для данного (физического) треугольника сумма углов близка к выпрямленному углу; этот опыт может дать лишь толчок для более внимательного рассмотрения вопроса об углах треугольника, и если бы удалось изыскать такой процесс образования треугольника, чтобы из него сделалась ясна неизбежность свойства, что сумма внутренних углов треугольника равна выпрямленному углу, мы тогда пришли бы к открытию этого свойства при помощи интуиции. Повидимому,

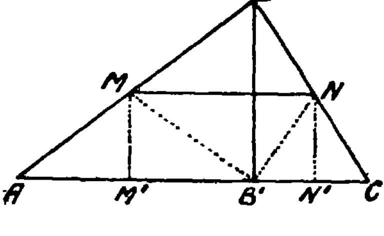


Чер. 6.

однако, изыскать такой процесс и дать соответствующее образное воспроизведение этого процесса крайне трудно, а может быть, невозможно; здесь неизбежно, повидимому, значительное участие логики. Если, например, пользоваться вращением (чер. 6) (прямая AN как бы ломается в точке B и около этой точки вращается —

угол поворота отмечен стрелкою, — после чего прямая займет положение BM; затем как бы ломается в точке C и, вращаясь около точки C, приходит в положение CP, после чего этой прямой надо еще повернуться на некоторый угол около точки A, чтобы притти к начальному положению), то можно добиться без каких-либо заметных логических суждений, что, в общем, прямая сделала полный оборот и, следовательно, повернулась на угол, равный двум выпрямленным. Отсюда при малом участии логики следует, что сумма внешних углов треугольника равна двум выпрямленным углам (или 4 прямым углам), и при несколько бо́льшем участии логики явится возможность установить, что сумма внутренних углов треугольника равна одному выпрямленному углу (или $2d$).

Так же точно, если мы хотим иллюстрировать процесс сложения углов треугольника перегибанием вырезанного из бумаги треугольника сначала по средней линии MN (чер. 7) (здесь M есть середина стороны AB и N — середина BC), а затем перегибаниями по MM' ($MM' \perp AC$) и NN' ($NN' \perp AC$), то здесь приходится призвать на помощь логику в следующих пунктах:



Чер. 7.

1) ясно, что при перегибании по MN фигура MBN займет положение $MB'N$, симметричное с прежним относительно оси MN, но как увидеть, не прибегая к помощи логических рассуждений, что точка B' попадет на прямую AC (другими словами: правда ли, что высота треугольника BB' делится прямою MN пополам)?

2) При перегибании по MM' (а также по NN') станет ясным, что $\triangle AMM'$ займет положение $\triangle B'MM'$ только тогда, если мы сошлемся на некоторые свойства равнобедренного треугольника, (что $\triangle AMB'$ равнобедренный—это, в сущности, также познается при некотором участии логики: MB' все равно, что MB, а $AM = MB$, следовательно, и $MB' = AM$).

Все предыдущие соображения приводят к мысли, что во всякой интуиции должны иметь место, хотя бы минимальное, следы

логики. А это обстоятельство, указывает на то, что логика и интуиция настолько тесно переплетаются между собою, что, пожалуй, придется признать задачу „разделить интуицию и логику“ невыполнимою.

Даже в аксиомах D. Hilbert'a мы можем видеть это переплетение интуиции и логики. Например, аксиома I_6 говорит: если, 2 точки A и B прямой a лежат на плоскости α, то каждая точка прямой a лежит на плоскости α. После чего следует добавление: в этом случае говорят, что „прямая a лежит на плоскости α“. Здесь мы можем видеть и нечто, взятое из образа обычной прямой, лежащей на плоскости; здесь можно подметить и в минимальном ее проявлении и логику: так как прямая здесь рассматривается, как комплекс всех ее точек, и так как в этом случае все точки этой прямой лежат на плоскости, то следует считать, что и прямая лежит на плоскости. Прибавим сюда слова М. Симона [1]): геометрия есть химическое сочетание наглядного представления и логики.

Резюмируя предыдущее, мы можем установить в следующей форме значение тех средств, при помощи которых развивается содержание геометрии.

Опыт и наблюдение явились тем первоисточником, откуда началась геометрия.

Опыт может побудить предпринять ряд изысканий для того, чтобы увидать необходимость какого-либо геометрического свойства, либо, наоборот, отвергнуть предполагаемое свойство. Опыт, другими словами, может послужить толчком для начала определенной геометрической работы.

Интуиция и логика, переплетаясь между собою, являются теми орудиями, при помощи которых достигается накопление геометрических знаний. Применение этих орудий совершается или при рассмотрении того процесса, помощью которого получена соответствующая определенному вопросу комбинация, или при сопоставлении новой комбинации, подлежащей разучиванию, с прежними, уже разученными.

---

[1]) М. Симон.—«Дидактика и методика математики в средней школе». Спб. 1912. Стран. 158.

5. Увлечения современной педагогической мысли в области методики геометрии.

В настоящее время, под влиянием ничтожности результатов от обучения геометрии в средней школе, большинство педагогов приходит к мысли о необходимости разделить курс геометрии на две части — на пропедевтический курс и на систематический курс. Вот несколько выписок из разных авторов, характеризующих эти курсы.

1. С. А. Богомолов. [1]) „Первая часть — пропедевтический курс — должна иметь целью развитие пространственной интуиции и накопление геометрических знаний. Учащиеся должны проделать в этом курсе тот путь, каким в глубокой древности шло человечество, закладывая основы нашей науки; при этом самым широким образом надо использовать их способность пространственного воображения; ее постоянное упражнение и послужит лучшим средством к ее развитию. Мало того, в пропедевтическом курсе необходимо отвести видное место так назыв. лабораторному методу, т.-е. экспериментированию всякого рода . . . . . .

. . . .

Будем пока иметь в виду исключительно пропедевтический курс; вследствие особого его характера — преобладания наглядных доказательств, основанных единственно на интуиции, опыте и т. п., — увеличение его содержания не представит каких-либо затруднений. Мы думаем поэтому, что учащихся окажется возможным ознакомить с началами проективной геометрии . . .

. . . .

Но особенно подходит к духу этого курса геометрия начертательная; последняя даст твердую опору для пространственной интуиции, научив изображать пространственные образы в плоскости, не говоря уже о той практической пользе, которую принесет многим знакомство с ней. . . . .

. . . .

---

[1]) Труды Первого Всероссийского Съезда преподавателей математики. Т. I, стран. 47 и след.

Словом, класс будет готов для перехода к систематическому курсу, который является второю частью намеченной программы. Этот курс будет уже построен по плану, требуемому основными положениями современной аксиоматики; в качестве исходной точки будет принято несколько первоначальных понятий, причем нет надобности стремиться к их minimum'у, и известным образом выбранная система аксиом. . . . .

. . . .

Затем должно быть твердо установленно, что эти предпосылки являются единственными во всем дальнейшем; а интуиция и чертежи будут лишь весьма удобным вспомогательным средством

. . . .

Покончив с основаниями геометрии, класс перейдет к ее изучению по намеченному выше методу; каждая теорема представится в виде необходимого логического следствия из доказанного ранее, т.-е. в конечном счете вся цепь геометрических знаний явится лишь неизбежным выводом из поставленных во главе аксиом".

2. С. И. Шохор-Троцкий. [1] „Новое направление в преподавании математики прежде всего предполагает разделение курса на две ступени. Первая является экспериментальною фазою усвоения учениками более или менее закругленного и полного цикла математического знания; вторая имеет целью — систематизацию знания и дополнение его новыми идеями и взглядами . .

. . . .

. . . .

Основной (он же — предварительный, приготовительный или пропедевтический в полном смысле этого последнего слова) [2] курс геометрии должен и может быть только тою отраслью естествознания, в которой более, чем во всякой другой его отрасли, можно применять вычисление и измерение. Важнейшую роль в основном курсе геометрии должны играть именно опыт и наблюдение, а также планомерный эксперимент".

---

[1]) С. И. Шохор-Троцкий. — «Геометрия на задачах». Книга для учителей. М. 1908. Стран. XV и XX.

[2]) Автор в предыдущем указывает, что его «основной» курс не следует смешивать с «пропедевтическим», понимаемым в обычном (узком) смысле этого слова.

3. Из „Инструкции преподавания математики“ во французских школах [1]). „При объяснении фактов преподаватель должен постоянно обращаться к опыту и без колебаний считать, как экспериментальную истину, то, что детям кажется очевидным . . . .

. . . .

всегда возможно и даже желательно дать почувствовать ученику необходимость доказательства в некоторых случаях, но давать его нужно только в том случае, если ученик убежден в его необходимости“ (все это относится к первому циклу средней школы).

4. Из объяснительной записки по преподаванию геометрии в школах Вюртемберга [2]).

„Систематическое преподавание геометрии во всех типах школ подготовляется при помощи наглядного курса геометрии в III классе. Исходным пунктом последнего служит наглядное знакомство с простыми телами. На них выводятся основные понятия геометрии, относительное расположение прямых и плоскостей и простые геометрические фигуры. В связи с этим преподаванием, которое избегает научных определений, стоит с самого начала черчение . . . .

. . . .

В систематической планиметрии следует, насколько это удобно, получать теоремы опытным путем и только после этого доказывать их логически . . . . ,

. . . .

Строго логический ход доказательств нет надобности полностью проводить во всех теоремах. В теоремах, которые представляются ученику более или менее очевидными, достаточно оттенить основание доказательства“.

Сделанные выписки достаточно характеризуют направление современной педагогической мысли в ее исканиях чего-то нового

---

[1]) См. «Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе». Под ред. проф. Д. М. Синцова. М. 1914. Стран. 38.

[2]) Там же. Стран. 228—229.

для дела обучения геометрии. Однако, вдумываясь в то, что дано в предыдущих цитатах, невольно начинаешь сомневаться в правильности этого направления, и возникает опасение, что это „новое“ не будет „лучшим“ по сравнению с тем, что было в прошедшем, что есть в настоящем.

Вот эти сомнения:

1. Г. Богомолов (и это не единичный пример) рекомендует, чтобы учащиеся проделали в пропедевтическом курсе тот путь, которым в глубокой древности шло человечество, закладывая основы геометрии. Но ведь прежде всего мы не знаем этого пути, и история математики не в состоянии отчетливо воспроизвести этот путь. Затем — и это самое главное, — человечеству понадобилось для прохождения этого пути слишком большой период времени, а мы должны своих учеников в короткий срок приобщить к богатствам геометрии. Ясно, что для этого нужен иной путь, который может лишь отчасти опираться на данные истории развития геометрии. А главною опорою такого пути должен служить определенный взгляд на геометрию, при помощи которого мы в настоящее время можем объяснять развитие содержания этой науки. Думается, что вышеизложенный взгляд (в главе 3-й) удовлетворит этому заданию.

2. Все сделанные выписки говорят в той или иной форме, что в пропедевтическом курсе к геометрии должен быть привлечен опыт: г. Богомолов говорит о „наглядных доказательствах, основанных на интуиции, опыте и т. п.“; С. И. Шохор-Троцкий говорит, что „важнейшую роль в основном курсе геометрии должны играть именно опыт и наблюдение“; инструкция для французских школ говорит, что „преподаватель должен постоянно обращаться к опыту и без колебаний считать, как экспериментальную истину, то, что детям кажется очевидным“.

В предыдущем мы видели, что опыт, сам по себе, убедить в непреложности какого-либо геометрического свойства не может; его роль сводится лишь к тому, что, благодаря ему, в некоторых случаях (и далеко не часто) возникает потребность выполнить ту или иную геометрическую работу, а эта последняя приводит иногда к установлению непреложности известного свойства. Поэтому сказать, как то, напр., делает С. А. Богомолов, что нужны

„наглядные доказательства, основанные на интуиции, опыте и т. п.“ — слишком мало; должно было присоединить сюда ряд примеров, где бы отчетливо выяснялось бы, как именно можно использовать опыт, чтобы, благодаря ему, сделать ясной необходимость известного свойства. Если этого не сделать, то будет иметь место сомнение, что на практике в пропедевтические курсы геометрии будет введен в дело опыт в его грубой форме. Ниже будут даны указания, что действительно на практике так именно и бывает. Аналогичные сомнения возникают и по поводу отношения к пользованию опытом и со стороны С. И. Шохор-Троцкого и со стороны авторов инструкций по преподаванию геометрии для школ Франции и Вюртемберга. Все эти сомнения сводятся к следующему: так как здесь не выяснено, как использовать опыт, чтобы при его помощи получилось действительно „доказательство“ какого-либо свойства или чтобы необходимость известного свойства сделалась „очевидною“, то возникает опасение, что на практике опыту будет придано совсем не то значение, какое он может иметь для развития содержания геометрии (практика показывает справедливость этих опасений).

3. Во многих случаях (это особенно сказалось в данной выше выписке из доклада С. А. Богомолова) имеется стремление дать в этом пропедевтическом курсе слишком большой материал. С. А. Богомолов желает даже ознакомить в этом курсе учащихся с началами проективной геометрии и считает очень подходящим материалом для этого курса факты из начертательной геометрии. С этим стремлением увеличить количественно материал пропедевтического курса геометрии приходится постепенно встречаться. Напр., Н. А. Тамамшева в своем докладе „О реформе преподавания математики“, прочитанном на 1-м Всерос. Съезде преподавателей математики [1]), считает возможным уже на 2-ой год обучения (обучения вообще, а не обучения геометрии) ввести в дело метод координат, на 4-й год обучения — пропорциональные линии и подобие фигур, на 5-й год — конические сечения и т. п. В программе пригото-

---

[1]) Труды 1-го Всероссийского Съезда преподавателей математики. Т. II, стран. 143—148.

вительного курса для III кл. кадетских корпусов [1]) можно найти подобие фигур, центр подобия, правильные многоуг-ки и т. п.

Такое стремление нельзя признать рациональным. И здесь можно отметить 2 опасности: 1) при необходимости, согласно требованиям программы, ознакомить учащихся с массою фактов так легко вступить на тот путь, который упорно держится в нашей школе, на путь заучивания тех словесных фраз, которыми выражаются подлежащие изучению факты; 2) при загромождении курса фактами, на второй план отходит то, что должно бы быть признанным самым существенным, а именно: освоение учащихся с тою работою геометрических изысканий, при помощи которой обогащается содержание геометрии; отпечаток, оставляемый этою работою на сознании учащихся, и должен быть признан наиболее ценным элементом геометрического развития.

В частности, особенно много сомнений вызывают мысли, высказываемые С. А. Богомоловым, о желательности ввести в пропедевтический курс основания проэктивной и начертательной геометрии. Очень естественно, что авторы руководств начальной геометрии при составлении их, а также преподаватели во время своей работы в классе должны иметь в виду то понимание геометрических фактов, какое имеет место в проективной геометрии, и это обстоятельство должно отразиться и на составляемых этими авторами учебниках и на практической работе таких преподавателей. Но отсюда очень далеко до введения в пропедевтический курс оснований проективной геометрии. Здесь еще более усиливаются два вышеотмеченных опасения.

4. По отношению ко второй части обучения геометрии, к систематическому курсу, в вышеприведенных выписках можно найти двоякое отношение. Инструкции по преподаванию геометрии для школ Франции и Вюртемберга в той или иной форме говорят о доказательствах теорем. Согласно этому, следует думать, что для авторов этих инструкций курс геометрии распадается, как то было и раньше, на ряд теорем и главною заботою (опять-таки, как и раньше) является вопрос о доказательствах этих теорем. Французская инструкция лишь обращает внимание на необходи-

[1]) К. М. Щербина. — «Математика в русской средней школе». Стран. 100.

мость добиться того, чтобы ученик почувствовал потребность доказательства, а вюртембергская инструкция рекомендует сначала получать теоремы опытным путем, а потом уже их доказывать, причем не всегда даже рекомендуется проводить полностью строго логический ход доказательства.

Не останавливаясь на мелких сомнениях (напр., при помощи опыта нельзя получить теорему, а можно лишь использовать опыт с целью подтолкнуть к исканиям по отношению к известному геометрическому вопросу), обратим внимание на то, что здесь систематический курс предполагается, в общем, такой же, каковым он был и раньше, когда не было в начальной школе или в младших классах средней школы пропедевтического курса. Это обстоятельство, с одной стороны, указывает, что даже сами реформаторы не придают существенного значения пропедевтическому курсу, а, с другой стороны, имеет место опасение: раз систематический курс геометрии, как то было и раньше, распадается на ряд теорем, то не будет ли иметь место и в будущем тот результат, который так часто приходилось встречать в прошедшем, а именно — ученикам, окончившим среднюю школу, геометрия представляется в виде собрания теорем, неизвестно почему или зачем появившихся, причем эти теоремы надо еще почему-то доказывать.

Другое отношение к систематическому курсу имеется в докладе С. А. Богомолова. Здесь мы ясно видим стремление переделать обычный курс геометрии по новому: 1) установить определенную систему аксиом; 2) каждая теорема должна явиться необходимым логическим следствием системы аксиом и доказанного ранее — все это говорит о стремлении автора придать систематическому курсу форму логической системы. В этом направлении уже имеется и ряд работ: 1. F. Enriques. — „Fragen der Elementargeometrie“ [1]). Здесь даны работы ряда лиц по различным вопросам элементарной геометрии, причем руководителем этих работ является сам F. Enriques, которому принадлежат 2 статьи в этой книге, и одна из них — „Bemerkungen zum Unterricht in der wissenchaftlichen Geometrie“ — трактует вопросы педа-

[1]) Перевод с итальянского.

гогического характера. Многие дальнейшие статьи изложены так, что у многих, подпавших под влияние работ Паша, Веронезе, Гильберта и др., может возникнуть мысль провести многие результаты этих статей в учебник геометрии. 2. Halsted. — Geometrie rationelle" [1]). Автор дает учебник геометрии для средней школы именно в том духе, который имеет место в докладе С. А. Богомолова: в основу положены аксиомы Гильберта, а дальнейшее содержание состоит из ряда теорем, которые автор стремится привести в логическую систему [2]).

Такое отношение к систематическому курсу геометрии может возбудить большое сомнение: неужели же средняя школа должна насильственно вовлекать своих учеников на тот путь по отношению к геометрическим знаниям, какой избран лишь специалистами, посвятившими свои силы на проведение геометрии в логическую систему. Если мы вообразим ученика, имеющего задатки сделаться в будущем вторым Штейнером, то та кропотливая и мелочная работа приведения в логический порядок уже разученных геометрических фактов должна показаться ему неитересною и может побудить его вовсе бросить занятия геометриею. Еще более сомнений может вызвать такой курс для учеников, не обладающих данными для посвящения себя изучению математики после окончания средней школы.

Вот те сомнения, какие имеют место по отношению к взглядам современной педагогической мысли, ищущей новой постановки курса геометрии.

6. Ошибки современной методики геометрии.

Остановимся прежде всего на положении дела обучения геометрии в средней школе.

В главе 2-ой была данная общая характеристика традиционной системы преподавания геометрии.

---

[1]) Перевод с английского.

[2]) Конечно, как это отмечено выше по отношению к работам Гильберта, можно сомневаться в возможности этого, а тем более для учебника.

И наши наиболее ходовые учебники (Давыдов, Киселев и многие другие, им подражающие), и наша традиционная система преподавания геометрии (диктуется или читается теорема, объясняется и записывается ее доказательство, после чего часто следует классическое „что и требовалось доказать", а на следующий урок происходит спрашивание учеников, причем большинству из них надо быть готовым дать ответ на вопрос: „докажите такую-то теорему")—все культивирует взгляд на геометрию, как на собрание теорем. И это обстоятельство является коренным недостатком наших наиболее распространенных учебников. В них нет указаний на то, что известная, уже выполненная учащимися работа ставит на очередь новые вопросы; нет в них, конечно, и развития той работы, которая может привести к ответам на поставленные вопросы, а взамен того дается очередная теорема, сопровождаемая доказательством. И практическая методика геометрии (ведь мы знаем, что во многих случаях дело преподавания геометрп ведется в соответствии с избранным учебником) повторяет, за теми исключениями, какие выше указаны, эту коренную ошибку учебников.

Здесь кстати указать, что и более частные погрешности учебников постоянно повторяются на практике. Так, мы знаем, что на первых уроках геометрии заставляют учащихся изучать доказательства прямой и обратной теоремы о смежных углах, а между тем в них нечего доказывать[1]). Введение в курс таких теорем

---

[1]) Вот выписка из моего доклада «Современное состояние курса геометрии в средней школе в связи с разбором наиболее распространенных учебников». См. Труды 1-го Всероссийского Съезда препод. мат. Т. II, стран. 75—77.

«Общеизвестна теорема: сумма двух смежных углов равна 2d. Для доказательства этой теоремы пишется ряд равенств, приводится ряд рассуждений, но оказывается, что здесь нет материала для доказательства.

Для выяснения этого наиболее удобно перенести вопрос на строго логическую почву, отказавшись от тех образов, с которыми мы связываем эту теорему. Для этой цели следует воспользоваться символами. Имеем класс объектов: a, b, c, d, e,..., которые мы называем углами и относительно которых надо доказать, что $a+b=2d$, где a и b суть два объекта этого класса, особенным образом выбранные, а d есть объект этого же класса, обладающий особыми признаками.

можно объяснить лишь какою-то исключительною любовью к „доказательствам“, и этою любовью обладают не только наши учебники, но и иностранные. Также точно только любовью к доказательствам можно объяснить следующий факт: 1) доказывают прямую теорему — „если из точки на прямую опущен перпенди-

---

Все объекты нашего класса удовлетворяют следующим постулатам: 1) постулат сложения — для всяких двух объектов a и b возможно найти в этом же классе третий объект, называемый суммою двух первых, т.-е. возможно найти $a+b$; 2) 2d значит $d+d$; 3) надо перевести образное представление смежных углов на символы. Обычное определение смежных углов в связи с образным процессом сложения углов возможно перевести на символы в такой форме: в условии теоремы даны два таких объекта a и b, что их сумма равна некоторому особому объекту c; 4) надо сделать подобный же перевод на символы для прямого угла, обозначаемого знаком d. «Прямым углом называется один из равных смежных углов», т.-е. символ d есть такой особенный объект нашего класса, что $d+d=c$ (на основании 3) или (на основании 2) $2d=c$.

Все доказательство сводится тогда к тому, что к двум данным посылкам: $a+b=c$ и $2d=c$ надо присоединить третью — два объекта (обыкновенно говорят «две величины»), порознь равные третьему, равны между собою, и заключить отсюда: «следовательно, $a+b=2d$».

Но в наших наиболее распространенных учебниках даже и этого делать не приходится. В самом деле, там избегается введение в курс геометрии того особенного угла, который обозначен символом c (в некоторых учебниках вводится этот особенный угол, называемый развернутым или выпрямленным, но эти учебники почти не употребляются в средних учебных заведениях); раз этот угол не входит в курс, а взамен его вводят лишь один особый угол прямой, названный символом d, то нам остается 4-ый постулат выкинуть, а 3-ий изменить: данные в условии теоремы символы a и b связаны между собою соотношением $a+b=2d$. Что же тогда доказывать? Содержание теоремы вовсе исчезает.

Такую же ценность имеет и обратная теорема, доказательство которой так трудно дается учащимся. Понятно теперь — почему? Потому что, в сущности, здесь доказывать нечего, надо лишь видеть. Здесь дело еще хуже; чтобы показать это, выписываю теорему в редакции одного из учебников: если сумма двух прилежащих углов DBC и CBA равна двум прямым, то их внешние стороны DB и BA образуют прямую линию; следовательно, эти прилежащие углы будут сложными.

Если ученик усвоил понятия «прямой угол» и «сумма двух углов», то каково ему читать или слушать начало доказательства: предположим, что DB не будет продолжением прямой BA и т. д. Ученик вправе ска-

куляр и проведены наклонные, то перпендикуляр короче всякой наклонной"; 2) доказывают (или иногда предлагают это сделать самим учащимся) обратную теорему „кратчайшее расстояние от точки до прямой есть перпендикуляр". Если не заниматься только диалектикой, а вдуматься в суть дела, то становится ясным, что эти 2 формы суть выражения одной и той же мысли и отнюдь одно из этих предложений не обратно другому[1]).

Наряду с таким стремлением делать изо всего теоремы и их доказывать можно отметить особенную любовь учебников геометрии к определениям.

Поучительно по своей толщине книга Schooten'a, где собраны воззрения различных авторов на основные геометрические объекты и соответствующие определения.

На этой почве в наиболее распространенных учебниках возникает путанница, примером которой служит выписка из цитируемого выше моего доклада — „Современное состояние курса геометрии и т. д."

„Другой ряд недоразумений возникает на почве следующих определений:

зать, что мы не имеем права этого предполагать, так как дано, что $\angle DBC + \angle CBA = 2d$, а это равносильно тому, согласно определениям суммы углов и прямого угла, что DB и BA являются продолжениями друг друга. Преподавателю остается затуманить и мысль и воображение ученика, чтобы заставить его принять предлагаемое доказательство».

[1]) См. подробности в том же докладе (современное состояние и т. д.), в Трудах Съезда, т. II, стран. 78.

Интересен по поводу этой обратной теоремы следующий факт. Г. Киселев, в учебнике которого имелась эта обратная теорема, выступил в прениях после доклада в защиту этой обратной теоремы (Труды 1-го Съезда, т. II, стран. 94) и в новом (21-ом) издании своего учебника (А. Киселев. — «Элементарная геометрия»), вышедшем после 1-го Съезда, оставил эту обратную теорему. После этого мною была напечатана статья: «По поводу выхода 21-го издания учебника геометрии А. П. Киселева» (Вестник опытной физики и элементарной математики, № 560, 1912 г. XLVII семестра № 8-ой, в отделе «Библиография»), в которой опять-таки мною было обращено внимание на эту обратную теорему. И вот, в 23-м издании (1914 г.) своего учебника г. Киселев, под влиянием ли этой статьи, либо по иным причинам, уже эту обратную теорему не приводит.

1) сочетание каких-либо точек, линий, поверхностей, тел, а также каждый из этих элементов в отдельности называется геометрической фигурою;

2) многоугольником называется часть плоскости, ограниченная со всех сторон прямыми.

Сопоставление этих определений позволяет заключить: многоугольник не есть фигура, между тем, как многогранник (определение цитируется выше[1]) есть фигура, потому что именем „фигура" может быть названо тело (часть пространства), но не часть плоскости (поверхность, упоминаемая в определении фигуры совсем не то же самое, что часть ее). Далее имеем еще определение:

3) часть площади, ограниченная со всех сторон, называется площадью.

Из (2) и (3) определений вытекает: многоугольник есть частный вид площади; также из определения круга[2]) следует: круг есть частный вид площади. Какой же смысл имеют встречающиеся далее термины: площадь прямоугольника, многоугольника, круга и т. п.?"[3]).

Иногда, как мы знаем, стремятся помочь делу добавлением при определении понятий „площадь многоугольника, круга и т. п." термина „величина" или слов „независимо от формы". Получаются определения вроде следующего: площадью треугольника называется величина части площади, занимаемой этим треугольником (или: называется часть плоскости, занимаемая фигурою, независимо от ее формы).

Конечно, такие добавления не помогают делу. В самом деле, чтобы быть последовательным, надо в таком случае прежде всего установить, что ограниченную со всех сторон часть плоскости можно рассматривать, как величину, и что совокупность таких частей составляет систему величин. Затем надо для каждого,

---

[1]) «Многогранником называется тело, ограниченное со всех сторон плоскостями».

[2]) Обычное определение круга таково: «кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью».

[3]) Труды 1-го Съезда преподавателей математики. Т. II, стран 80—81.

например, треугольника выбрать соответствующее значение из этой системы. Если треугольник определяют, как часть плоскости, то сам треугольник и является значением из этой системы величин, соответствующей этому треугольнику, т.-е. опять приходим к заключению, что термин „площадь треугольника“ совпадает с термином „треугольник“.

Добавление „независимо от формы“ — вовсе беспочвенно: раз часть плоскости ограничена со всех сторон, то тем самым этой части плоскости неизбежно придана форма. Возможно ли мыслить ее независимо от формы? Во всяком случае, следовало бы (а попыток к этому в учебниках не имеется) научить как-либо части плоскости, по самому своему происхождению наделенные формою, трактовать „независимо от формы“.

Пусть скажут, что все это факты — мелкие. Но 1) если это „мелкие“ факты, то значит все такие определения несущественны для развития содержания курса геометрии, а если они не существенны, то не следует ли их вовсе удалить и заменить положениями — „я умею построить треугольник“, „я вижу площадь треугольника“ и т. п., а 2) обилие таких противоречащих друг другу определений указывает на то, что наши ходовые учебники геометрии, а следом за ними и наша практическая методика геометрии, уклонились в сторону диалектики. А это обстоятельство (оно, между прочим, вызвано нашим стремлением к тому, чтобы ученики знали „ответы“ на вопросы, могущие быть им заданными на экзаменах) уже является крупным грехом современной постановки дела обучения геометрии.

Такая постановка сказалась и на тех исканиях, какие имеют место в работах по методике геометрии для средней школы. Математические журналы заполняются главным образом (исключения редки) статьями по геометрии, дающие ответ на вопрос: как проще, понятнее для учеников, доказать ту или иную теорему? Реже, хотя все-таки часто, и это тоже соответствует современной постановке дела обучения геометрии, встречаются статьи, имеющие целью обычный ряд теорем заменить другим, в общем (как это постоянно бывает), мало чем отличающимся от обычного; наконец, имеется ряд статей, трактующих общие вопросы о значении интуиции и логики для геометрии и стремящиеся поставить курс

геометрии в средней школе на ту почву, какая выяснена в главе 5-ой, по преимуществу в связи со взглядами С. А. Богомолова.

Принцип наглядности, проникший и в среднюю школу в преподавание геометрии, принял характер или иллюстраций различных геометрических предложений или иллюстраций доказательств различных теорем. Слишком мало появляется в свет методических работ, которые выясняли бы возможность иного характера постановки дела преподавания той или иной части курса геометрии, которая на первый план выдвигала бы не „доказательства", а „происхождение" теорем. Редко также приходится встречаться со стремлением конструировать наглядные пособия так, чтобы пользование ими приводило бы учащихся к открытию непреложности того ими другого свойства.

Вот пример, подтверждающий вышеизложенное обычное отношение к характеру преподавания геометрии. За последние годы стала широко распространяться рекомендуемая на различных курсах, имеющих своею задачею подготовку преподавателей, переведенная с английского языка книга Дж. В. А. Юнг. — „Как преподавать математику"? Вот каково отношение этой книги к вопросам преподавания геометрии:

„Суть здесь вся в том, чтобы ученик научился доказывать, доказывая" [1]).

На стран. 297 — 299 выясняется преимущество аналитического характера доказательства теоремы (в виде примера берется теорема: „если прямая перпендикулярна к двум прямым, лежащим на плоскости, то она перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей на этой плоскости и проходящей через точку пересечения прямой плоскости"):

„Даже тогда, когда доказательства с соблюдением строго формального характера будут в полном разгаре, мы можем применять конкретные пособия для того, чтобы привести ученика к какому-нибудь предложению, для иллюстрации предложений, для изучения их назначения, свойств и следствий. Большую ценность имеет применение моделей. Их могут изготовлять сами же ученики, если

---

[1]) Дж. В. А. Юнг — «Как преподавать математику?» Стран. 295

это им по силам, и, помимо постоянного применения моделей к доказательствам, ими можно иногда пользоваться, как средством прямого доказательства, как, например, в доказательствах, основанных на разделении на части или наложения“ [1]).

„Превосходным упражнением для учеников может также служить составление генеалогического дерева для какого-либо определенного доказательства. Работа состоит в том, что ученик указывает, от каких предложений наша теорема зависит непосредственно, затем педложения, от которых зависят предложения, указанные в первую очередь, и т. д. до тех пор, пока мы не дойдем до допущений, принимаемых без доказательства“ [2]).

Ясно, что на первый план автором выдвигается обучение учеников доказательствам. Лишь изредка удается подметить мысль о возможности какого-то иного отношения к делу. Намек на это, например, видим в выше данных словах: „ими (наглядными пособиями) можно иногда пользоваться, как средством прямого доказательства“. Однако, и здесь 1) речь идет лишь о „доказательстве“ (хотя бы и прямом), 2) имеется опасение, что автор хочет вступить на путь опыта, при помощи которого не уясняется непреложность какого-либо свойства, а лишь иллюстрируется приближенное (иного опыт и не может дать) совпадение с объясненною теоремою. Еще ярче выясняется отношение автора к делу на стран. 296 и стран. 304—305. Здесь речь идет о приучении учеников уже к „открытиям“ (конечно, переоткрытиям), но, однако, и эти открытия сводятся исключительно к открытиям доказательств тех теорем, которые даются в учебниках в виде упражнений на искание доказательств. Автор уделяет некоторое место вопросу „как приступить к розысканию доказательств?“ и методам „искания доказательств“. К сожалению, автор не разрабатывает вовсе вопроса об исканиях настоящего геометрического характера (особенностей, почему-либо интересных для нас, почему-либо обращающих на себя внимание различных геометрических комбинаций). Такое отношение к делу автора принуждает высказать, что все то, что относится к преподаванию геометрии,

---

[1]) Там же. Стран. 300.
[2]) Там же. Стран. 303.

заставляет притти к мысли, что так, как трактует автор, вовсе не следует преподавать геометрию.

Обратимся теперь к курсам пропедевтического характера. 40—50 лет тому назад пропедевтические курсы геометрии пользовались значительным распространением и большинство их сводилось к изучению, в смысле чисто-внешнем, моделей геометрических тел. Образцом таких курсов может служить тот пропедевтический курс, который имеется в учебнике геометрии Вулиха. Этот курс сводится к чисто-словесному описанию того, что учащиеся видят на моделях различных геометрических тел. Это описание прерывается иногда рядом опытов, имеющих целью показать равенство некоторых отрезков, некоторых углов и сопровождается целым рядом определений: прямым углом назыв. ... треугольником назыв. ... квадратом назыв. ... и т. д.

Такой пропедевтический курс следует признать не только бесцельным, но *даже и вредным*: на всем его протяжении учащиеся вовсе не выполняют работы геометрического характера, а довольствуются только описанием того, что видит физическое зрение, к чему присоединяется использование некоторого жизненного опыта учащихся, не доведенного до отчетливости, и что сопровождается заучиванием ряда беспочвенных определений.

За последние годы начали появляться в большом числе новые учебники пропедевтического курса геометрии, их обычное название — „наглядная геометрия“ (В. Кемпбелль, А. Астряб, А. Кулишер, Кутузов и ряд других). Эти курсы в большинстве случаев также начинаются с рассмотрения тел, однако, они отличаются от прежних большим развитием своего содержания. Изредка встречаются курсы, начинающие занятия с построения прямых линий, углов и т. п.

Во всех этих пропедевтических курсах имеются педагогические ошибки. Вот важнейшие из них (выше, в сущности, уже намечено, в чем следует искать корни этих ошибок).

1. Под влиянием так называемого ф ю з и о н и з м а (так называется то течение в методиках геометрии, которое желает отказаться от разделения курса геометрии на планиметрию и стереометрию и которое стремится слить в единый курс и геометрию на плоскости и геометрию в пространстве) и под влиянием желания

добиться того, чтобы учащиеся свободно переходили от образов плоской геометрии к пространству, обычно пропедевтические курсы геометрии начинаются с изучения геометрических тел (правильнее сказать: с изучения моделей геометрических тел). Иногда учебник предлагает с самого начала детям заняться рассмотрением различных форм тел и, указывая на выставленную модель куба, утверждает, что вот — самая простая форма тел. При таком начале курса на первых же порах создается взаимное непонимание учителя и учеников (либо учебника и учеников). В самом деле, с точки зрения учителя, который знаком с происхождением куба, является понятным утверждение, что это — самая простая (или, по крайней мере, одна из простых) форма тел, так как учитель владеет рядом признаков, которыми такое утверждение обосновывается. Но с точки зрения ученика такое утверждение висит в воздухе: ученик, не зная происхождения куба, конечно, должен, хотя бы и полусознательно, удивиться тому, что такую хитрую вещь учитель называет „самою простою"; для ученика более простыми являются те формы, с которыми он чаще сталкивается: лошадь, корова, человек, дерево, дом и т. п.

Если, как то делают другие учебники, ученикам предлагается с самого начала вылепить из глины такой же предмет, как и выставленная модель куба, то, в сущности, нет возможности, если ученик вместо модели куба вылепит модель наклонного параллелепипеда, убедить его, что это не „такой же" предмет. Нет возможности потому, что ученики еще незнакомы ни со сравнением отрезков и углов, ни с возможностью получать особые — прямые углы.

Придется учителю опираться, в виду отсутствия у учеников этих сведений, на неясный и не приведенный в отчетливость жизненный опыт учащихся; учитель станет говорить: „смотри, вон там стенка стоит прямо, а у тебя криво, косо или наклонно" и т. п.

При обоих вышеуказанных началах курса имеют место грубые педагогические ошибки: в первом случае, с самого начала курса появляется взаимное непонимание и столкновение двух точек зрения, учителя и ученика, и это непонимание или это столкновение все углубляются по мере того, как переходят к рассмотрению все новых и новых тел; во втором случае вместо того, чтобы привести в отчетливость те зачатки геометрических

знаний, которые имеются у учеников благодаря их жизненному опыту, учителю приходится опираться именно на них, не смотря на то, что эти зачатки у учеников еще слишком туманны, еще в слишком хаотическом состоянии.

2. Широко развито в этих пропедевтических курсах пользование опытом. Например, предлагают учащимся при помощи опыта убедиться, что если на круге отложить в разных местах равные хорды, то центральные углы, соответствующие этим хордам, равны; что если вырезать из бумаги два треугольника так, чтобы у них было по две равных стороны и равные углы между этими сторонами, то такие треугольники равны; что сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым; что касательная к кругу перпендикулярна к радиусу, идущему в точку касания, что длина окружности в $3\frac{1}{7}$ (или 3,14) раза больше длины диаметра и т. д. и т. д.

Такое пользование опытом является, как это уже указывалось выше, ошибкою. Убедиться в необходимости того или иного свойства, как то требуют авторы учебников, учащиеся из этих опытов не могут. Они в некоторых случаях готовы признать неизбежность указываемых свойств потому, что в этих случаях имеет место некоторая симметрия или определенный способ получения фигуры, которые влекут за собою это свойство, как ближайшее следствие. Так, например, неизбежность равенства центральных углов круга, соответствующих равным хордам, есть ближайшее следствие симметрии круга относительно центра. Учащиеся полусознательно это чувствуют и, в силу этого, соглашаются признать необходимость этого свойства. Но опыт здесь не причем, и преподаватель или учебник, заставляя проделывать вышеуказанные опыты, вносят в этот вопрос нечто совершенно лишнее. Следовало бы, отбросив ненужный здесь опыт, постараться привести в отчетливость представление симметрии круга относительно центра, откуда непосредственно и получат учащиеся указанное свойство центральных углов. В других случаях (например, сумма внутренних углов треугольника или длина окружности и т. п.) ученики просто на веру принимают то, в чем советует убедиться учебник, а опыт является лишь некоторой иллюстра-

цией того, что практика не очень расходится с теорией. Выполняя ряд таких опытов, ученики, в сущности, не учатся геометрии, ибо эта работа не свойственна геометрии.

3. В пропедевтический курс вводят слишком много фактического материала. Мы здесь встречаем и признаки равенства треугольников и сумму углов и треугольников и многоугольников и свойства различных видов параллелограмма и свойства касательной к кругу и свойства средних линий треугольника и трапеции и т. д. и т. д. Это обстоятельство указывает на то, что авторы таких курсов на первый план выдвигают, как то было и встарь, накопление знаний, а ту работу, которая должна привести к этим знаниям, в сущности, вовсе игнорируют. Здесь имеет место существенная педагогическая ошибка. Пора была бы уже прочно установить, что самым ценным элементом при обучении всякому предмету должен считаться тот отпечаток, который налагается на сознание учащегося работой над материалом этого учебного предмета, причем накопление фактических знаний являлось бы косвенным результатом этой работы; отнюдь не следовало бы это „накопление знаний“ выдвигать на первый план.

Вспомним, что это накопление знаний достигается в наших пропедевтических курсах при помощи широкого использования опытов. Вот обычная схема обучения: сделай то-то и то-то (например, вырежь из бумаги треугольник, отрежь его углы и сложи их) из этого убедись в том-то и том-то (убедись, что, например, сумма внутренних углов треугольника $=2d$). Уже тот факт, что ученикам здесь с о о б щ а е т с я требуемое свойство, указывает на ненормальность и нежелательность этой схемы. А результатом ее очень частого применения явится то, что ученик станет запоминать сообщаемые ему факты, опираясь на свою словесную память. Опять, следовательно, как и встарь, обучение геометрии будет опираться на простое заучивание.

7. Желательный характер постановки курса геометрии.

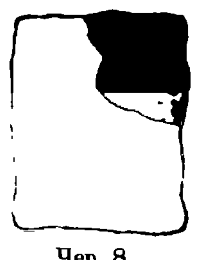
Все предыдущее склоняет к мысли изменить постановку курса геометрии так, чтобы привести ее в соответствие с взглядом на геометрию, изложенным в главе 3-ей.

Прежде всего возникает желание изменить самую постановку учебного дела вообще, изменить так, чтобы, вместо обычного задавания и спрашивания уроков, в классе протекала бы работа, выполняемая учениками при содействии учителя, работа, свойственная тому или другому учебному предмету (в данном случае геометрии).

Классные занятия направлялись бы тогда мыслью освоить учащихся с характером указанной работы, а косвенным результатом такой постановки учебного дела явилось бы и накопление у учащихся фактических знаний: в самом деле, работать можно лишь над каким-нибудь материалом, и самое выполнение работы должно повлечь за собою, без всяких заучиваний, усвоение этого материала учащимися или, по крайней мере, должно привести учащихся к убеждению, что надо запомнить известный фактический материал, и учащиеся станут его разучивать не потому, что это им задается или что этого требует учитель, а потому, что они увидят, что без этого они не могут участвовать в текущей классной работе.

Рассмотрим особенности, имеющие общий характер, этой работы по отношению к курсу геометрии. Сделать это необходимо в связи с главою 3-ею, которая устанавливает определенный взгляд, положенный в основу настоящей работы, на самый предмет геометрии.

Работа должна начаться с выработки сознательного отношения к тому факту (он проходит как-то мимо сознания у множества людей, не только учащихся, но и взрослых), что мы повсюду видим границы. Эта сознательность должна заключаться просто в том, что, напр., смотря (чер. 8) мы констатируем, что мы видим и черную и белую области и видим границу между ними. В связи с изложенным в главе 3-ей, учащиеся постепенно устанавливают факт существования границ трех родов, возможность для себя и воображать и мыслить их как бы отдельно существующими, возможность изыскания наиболее простых линий и поверхности и переходят к работе комбинационного характера.



Чер. 8.

Эта работа, начинаясь с очень не сложных комбинаций, постепенно усложняется, появляется ряд вопросов, на которые надо изыскать ответы, ряд руководящих мыслей, которые ведут к новым и новым комбинациям. Всякий раз, когда во время этой работы наше внимание подмечает факты, которые почему-либо представляются нам заслуживающими внимания, мы должны эти факты формулировать словами и по возможности запечатлеть их в своем сознании. Появляется таким образом ряд теорем (и аксиом), причем на первый план окажется выдвинутым вопрос об их происхождении.

Те вопросы, которые появятся на протяжении этой комбинационной работы, потребуют для нахождения на них ответа или какого-нибудь геометрического процесса (наложение, перегибание плоскости, вращение и т. д.) или сопоставления рассматриваемой комбинации с теми, которые уже разучивались ранее. Иногда тот процесс, при помощи которого можно получить новый образ, соответствующий зародившемуся вопросу, а иногда то построение (циркулем и линейкою), которое приводит к этому новому образу, влекут за собою новые вопросы, и на них внимательное рассмотрение процесса или построения сразу дают ответы. Иногда придется этот новый образ сопоставлять с разученными ранее, и это сопоставление дает нужные ответы. Иногда во время рассмотрения процесса или во время вышеуказанного сопоставления выясняются особенности, не являющиеся ответами на возникшие ранее вопросы, а имеющие несколько неожиданный характер. Получаемые результаты во всех случаях являются фактами, обогащающими содержание геометрии. При детальном рассмотрении курса геометрии мы дадим примеры, иллюстрирующие все вышеуказанные случаи.

С точки зрения практического обучения важно наладить работу так, чтобы и направляющие работу вопросы и ответы на них возникали бы сами собою в сознании учащихся, а не навязывались бы им учащим. Однако, неизбежен и тот случай, что учащему приходится приводить в отчетливость тот вопрос, наличность которого можно подозревать у учащихся, но выявить который сами учащиеся не могут, благодаря тому, 1) что они еще очень не привыкли разбираться в своих представлениях и 2) что

они еще очень затрудняются передавать словами содержание своих представлений. Все это педагогу-практику должно иметь в виду и должно, даже в том случае, когда с первого взгляда кажется, что необходимый, естественно возникающий на протяжении предыдущей работы вопрос вовсе не имеется в сфере сознания учащихся, необходимо должно показать учащимся, что этот вопрос, даже если его придется во всей полноте выразить учащему, не висит в воздухе, а имеет прочную опору в предыдущем, и в представлениях учащихся имеются элементы, которые к этому вопросу дожны были бы их самих привести, если бы они были более опытны в умении разбираться в своих представлениях. Примеры этого также будут даны при детальном рассмотрении курса.

В некоторых частях курса геометрии поневоле придется отказаться от вышенамеченной схемы ведения курса. А именно, имеются в содержании геометрии отдельные моменты (но их в нашем обычном курсе очень мало), относительно которых возникает сомнение, что, быть может, подведение учащихся к таким моментам излишне, так как оно или повторяет работу, уже выполнявшуюся ранее, или требует слишком много времени для своего осуществления, которое более рационально использовать иначе. В таком случае придется стать на обычный путь, т.-е. дать формулировку той геометрической особенности, которая имеет здесь место, а затем дать ее пояснение (если угодно: формулировать теорему, а затем ее доказать). Но таких моментов, повторяю, не много, и прибегать к этому приему придется более часто только тогда, когда имеешь дело с учениками, уже привыкшими к геометрической работе (с учениками, уже геометрически развитыми). К числу таких моментов, напр., приходится, повидимому, отнести теорему Пифагора.

На протяжении всей этой геометрической работы явится неизбежным: 1) приводить в отчетливость все те зародыши геометрических знаний, какие имеются у учащихся под влиянием или жизненного опыта или неясной интуиции; 2) приводить в отчетливость все те новые для учащихся представления (т.-е. такие, с которыми не приходилось учащимся сталкиваться при жизненном опыте), которые постепенно входят в содержание геометрии

и дают начало новым и новым изысканиям; 3) выдвинуть на видное место, всякий раз, когда приходится с этим сталкиваться, ту работу обобщающего характера, на развитии которой зиждятся целые отделы геометрии (напр., учение о равновеликости, учение о перпендикулярности в пространстве и т. п.).

Отнюдь нельзя думать, что приведению в отчетливость всех геометрических представлений, как тех, которые отчасти заимствованы из житейского опыта, так и тех, которые вводятся в курс, по мере его развития, способствуют так называемые определения. Нет, словесные определения, вообще говоря, этой цели не достигают, и лишь тогда, когда учащемуся ясно происхождение того или другого объекта, того или другого представления, становится возможным утверждать, что желаемая ясность достигнута. В виду этого, во многих случаях следует отказаться от определений и заменить их сознанием учащихся: „я умею получить (или построить) то-то и то-то“. Сознание „я умею строить треугольник“ дает возможность работать над треугольниками и над вопросами, с ними связанными, и дает ее в большей мере, чем знание определения понятия „треугольник“. Так же точно, напр., определение окружности (линия, все точки которой находятся на равных расстояниях от одной, данной, точки или геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки) во многих случаях для учащихся является лишь фразою, осмыслить которую их еще неопытный ум не в силах, и эта фраза в таких случаях, в сущности, не дает возможности работать над окружностью и над вопросами, с нею связанными. Иное дело, если учащиеся, отказавшись от заучивания определения окружности, усвоят способ ее получения при помощи вращения на плоскости прямолинейного отрезка (около одного из его концов) — этого представления, связанного с умением построить окружность, достаточно, чтобы вести работу над изучением вопросов, где входит построение окружности.

Конечно, в этом отказе от определений не следует доходить до педантизма и вовсе не ставить вопросов, начинающихся словами: „что называется?“... Следует лишь все время иметь в виду, что не в этих словесных определениях суть дела и что они

всегда могут быть заменены выяснением происхождения того или другого понятия или умением получить тот или иной объект.

Необходимо обратить внимание на то, что проработка курса геометрии в вышеуказанном направлении потребует значительно больше времени, чем обычно на этот курс предназначается. В особенности нельзя спешить при прохождении начала курса; здесь необходимо дать учащимся много материала для работы, которая позволила бы прочно закрепиться в сознании учащихся основным геометрическим образам. Так же точно следует очень замедлять темп курса тогда, когда в курсе выступает ряд обобщений. Можно, наоборот, ускорить темп курса в его последних частях (измерение поверхностей и объемов), когда учащиеся уже настолько привыкли к характеру геометрической работы, что нет надобности уже долго останавливаться на ее отдельных этапах. Однако, здесь придется затратить сравнительно много времени на приучение учащихся к стереометрическим чертежам и на ряд упражнений, связанных с вопросами измерения поверхностей и объемов.

Следует еще заметить, что естественно сначала выделить рассмотрение комбинаций, умещающихся на плоскости, а затем уже перейти к комбинациям пространственным; другими словами, я считаю, что обычное подразделение курса геометрии на планиметрию и стереометрию — законно и естественно. Если сторонники фюзионизма дадут в своих будущих работах новые образцы слияния планиметрии и стереометрии в один курс и эти образцы окажутся способными выдержать серьезную критику, то я соглашусь на одновременное прохождение геометрии на плоскости и в пространстве. В настоящее время таких образцов не имеется и приходится, не впадая, однако, в педантизм, строить методику курса на основе разделения планиметрии и стереометрии.

Курс геометрии G. Lazzeri und A. Bassani, написанный под влиянием идей фюзионизма, не является достаточно убедительным для оправдания слияния планиметрии со стереометриею в учебном курсе геометрии.

Следует еще остановиться на геометрических задачах на построение.

Задачи на построение достигают цели развития учащихся только тогда, когда происхождение этих задач ясно для учащихся. Последнее будет иметь место лишь тогда, когда отдельные задачи на построение появляются само-собою благодаря развитию какого-либо общего вопроса. Основные задачи на построение (вроде построения перпендикуляра к данной прямой, деление угла пополам, построение треугольника, например, по 3 сторонам и т. п.) появятся в курсе, как необходимые его элементы. Например: нельзя работать над изучением треугольника, если не уметь его построить, нельзя пользоваться равенством треугольников, если не уметь построить треугольника, равного данному, и т. п. Более сложные задачи на построение отнюдь не следует предлагать учащимся так, как это обычно у нас делают. А обычный порядок таков: берут или особый сборник задач на построение или маленькие сборники, прилагаемые к различным главам учебника, и стремятся добиться, чтобы ученики умели решать многие из задач этих сборников, причем стремятся даже привести в формальный порядок мысль учащихся по поводу этих задач, для чего вводят 4 стадии работы: анализ задачи, построение, доказательство и исследование построения. Для приведения самих задач в известную систему, облегчающую учащимся усвоение их решения, служат, как известно, „методы" решения геометрических задач на построение.

Такое отношение к делу следует признать глубоко неправильным. Почему, например, как то имеет место в учебнике А. Киселева, учащимся предлагают еще в начале курса геометрии решить задачу на построение треугольника по основанию, противолежащему углу, и по сумме двух остальных сторон? Для учащихся не выяснена та работа комбинационного характера, которая способствовала появлению этой задачи, и, благодаря этому, ученик станет думать и работать над решением такой задачи только потому, что от него это требуют, но для него и непонятно происхождение этой задачи и безжизненны те „анализ, построение, доказательство и исследование", которые связывают с этой задачей.

Естественно возникшей эта задача могла бы быть в таком курсе геометрии, в котором было бы уделено известное место

вопросу о том, какие треугольники определяются, если построен один треугольник, помимо этого построенного. Так как этот вопрос вряд ли уместен в нашем школьном курсе геометрии, то приходится думать, что, как эта задача, так и целый ряд других, происхождение которых не может быть выяснено на протяжении этого школьного курса, должны быть отброшены. Взамен того появится ряд задач, тесно связанных с курсом, происхождение которых будет в большей или меньшей степени ясно для учащихся, и решению этих задач не придется учить, пользуясь схемой: „анализ, построение, доказательство и исследование;“ их решение становится достаточно ясным для учащихся, раз ясно происхождение самих задач.

Во всяком случае, следует установить, что геометрии учат не для того, чтобы научить решать ряд более или менее замысловатых задач на построение.

II. Детальное рассмотрение методики геометрии.

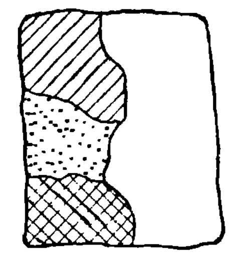
8. Беседа с учащимися о самом предмете геометрии.

В этом детальном рассмотреянии я буду сначала считать, что геометрии начинают учить с 13—14-летнего возраста (а может быть и позднее) и ведут дело так, чтобы провести в системе перед учащимся развитие содержания геометрии. Если, как то за последнее время часто имеет место, желают начать обучение геометрии с более раннего возраста и, отказавшись от системы, желают даже и детям дать известный запас геометрических знаний и умений, то придется ввести в ниже даваемое методическое развитие курса геометрии некоторые изменения. Каковы эти изменения — это будет выяснено в III отделе, посвященном методике „начального обучения геометрии".

Если мы хотим провести перед сознанием учеников развитие геометрии в выдержанной системе, то необходимым явится начать курс геометрии беседою с учениками на тему: „Что такое геометрия?" Беседа эта ведется в согласии с воззренями n°3. Необходимо, обратив внимание учащихся на какие-либо факты, имеющиеся перед ними, добиться, чтобы учащиеся признали, что они видят в окружающем постоянно границы; небо где-то там, далеко, сходится с землею — мы этот факт постоянно наблюдаем во время прогулок, и мы здесь можем видеть: 1) синее небо, 2) темную землю и 3) границу между ними. Мы видим также границу, отделяющую массу стены от внутревности класса, мы видим в окружающем целый ряд еще различных границ.

Очень полезен разноцветный рисунок, вроде прилагаемого (чер. 9). На нем мы видим: 1) границу, отделяющую массу бумаги от внутренности класса; 2) границы между областями различных цветов и 3) границы, отделяющие различные части границ, указанных во

2-м пункте, а именно—белая область от цветной[1]) отделена границею, и эта граница, мы видим, разделяется на части: одна отделяет белую область от черной, другая — белую от красной, третья — белую от желтой, а между этими частями мы опять видим границы. Учащиеся, вспоминая свой жизненный опыт, приходят к положению, что границы бывают только трех родов (см. n°3), что эти границы не материальны („не из чего не сделаны"), что все же они в силах и представлять и рассуждать по поводу них так, как будто бы эти границы существуют отдельно. Вводятся названия: „поверхности, линии и точки". Затем проделываются те опыты, которые, как это выяснено в n°3, позволяют выделить наиболее простые линию и поверхность (прямую линию и плоскость). Беседа переходит затем к установлению того, что геометрия занимается изучением различных совокупностей (различных комбинаций) поверхностей линий и точек. Каждая из таких совокупностей называется фигурою, а каждая точка, линия и поверхность, входящая в состав фигуры, называется ее частью. Не следует скрывать от учащихся, что сначала будем рассматривать по преимуществу лишь те фигуры, которые всеми частями умещаются на плоскости (т.-е. сначала будем изучать планиметрию), а потом уже — пространственные фигуры. На протяжении этой беседы явится возможность указать и на необходимость, дабы помочь своему воображению, рисовать рассматриваемые фигуры или мелом на доске или карандашом на бумаге, но всегда следует иметь в виду, что нарисованные линии и точки суть не настоящие линии и точки: те — нематериальны, а эти являются полосками мела или графита и т. п.



Чер. 9.

Думается, что не следует здесь становиться на такую точку зрения, которая требует, чтобы учащиеся могли сами воспроизвести в „следующий урок" все то, что было установлено во время этой беседы. Другими словами, не следует добиваться, чтобы уча-

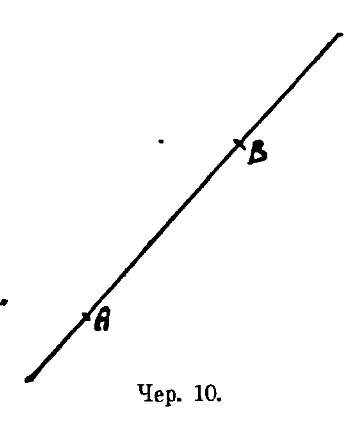
---

[1]) На чер. 9 надо подразумевать, что части, различно затушеванные, окрашены в разные цвета: черный, красный, желтый.

щиеся заучили ряд положений, появившихся во время этой беседы, хотя многие из них (имея в виду желание развивать геометрию в форме системы) полезно записывать. Следует довольствоваться тем, что во время этой беседы учащиеся будут принимать в ней живое участие: или обсуждая вопросы, поставленные на очередь, и находя на них ответы, или даже сами выдвигая новые вопросы, связанные с уже разобранными. Во всяком случае, беседа должна остаться беседою. а не должна обратиться в рассказ или в ряд определений, подлежащих заучиванию.

9. Простейшие комбинации: луч, отрезок, угол.

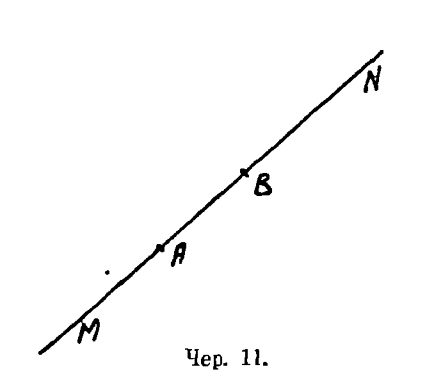
Итак, начинаем курс геометрии изучением простейших комбинаций; при этом приходится все время опираться на наблюдательность учащихся. Строим на плоскости прямую и точку; сначала точку, где придется, а затем — на прямой, и ставим вопрос, не видят ли учащиеся чего-нибудь особенного. Если точка была построена не на прямой линии, то ничего особенного не замечаем, а если учащиеся дают все-таки какие-либо ответы на этот вопрос об особенностях, то учащему приходится выяснять, что эти ответы бессодержательны. Когда точка будет взята на прямой, то учащиеся на этот вопрос отвечают (и обычно, как то показывает практика, без затруднеиий), что теперь прямая разделилась на 2 части: одна часть идет от точки без конца в одну сторону, а другая — в другую; эти части учащиеся показывают, проводя по ним палочкою. Даем этим частям название „луч“, прямая точкою делится на 2 луча. Усложняем комбинацию: строим прямую и на ней 2 точки (теперь уже можно дать этим точкам имена: точка A, точка B); чертеж полезно располагать так, чтобы учащиеся не привыкали к чертежам, где какая-либо прямая приблизительно параллельна краю доски или странице тетради (см. чер. 10).



Чер. 10.

На вопрос, что теперь особенного замечается учащимися, последние отвечают, что теперь прямая линия разделилась на 3 части. Эти части показываются палочкою и учащиеся устанавливают, что две из них уже знакомы; это — лучи, идущие один от точки A без конца, а другой — от точки B, а третья часть новая — она идет от точки A до точки B. Даем ей название „отрезок“ — получим отрезок AB.

Возможно было бы попытаться (на практике я этого не делал, боясь, что еще неразвитая наблюдательность учащихся не внесет сюда отчетливости, а лишь затуманит дело) поставить дело так, чтобы учащиеся в этой комбинации видели не 3, а 5 частей (чер. 11): 1) луч $AM\infty$, 2) луч $ABN\infty$, 3) луч $BAM\infty$, 4) луч $BN\infty$ и 5) отрезок AB.



Чер. 11.

Ко всему этому изучению рассматриваемых комбинаций следует присоединить (в разные моменты) упражнения: 1) в построении прямой через 2 данные точки, 2) в построении сколько угодно лучей, исходящих из одной точки и 3) в построении отрезка без прямой. В последнем построении вводится некоторая условность: изображение ———————— принято считать изображением прямой линии — бесконечной, а изображение |————————| принято считать изображением прямолинейного отрезка.

Переходим к операциям над отрезками. Прежде всего надо привести в отчетливость умение учащихся узнавать, равны ли или не равны два данные отрезка и, в последнем случае, какой из них больше и какой меньше. Для этой цели полезно провести это „сравнение отрезков“ по следующей схеме: 1) берем несколько палочек, изображающих отрезки, и учащиеся при помощи некоторых операций с этими палочками устанавливают, что они умеют узнавать, равны ли или нет два данных отрезка

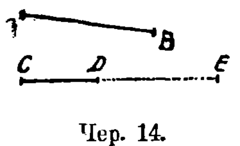
(палочки), и отличать больший от меньшего; 2) надо научить учащихся отчетливо описывать словами, что̀ надо делать для выполнения сравнения двух отрезков: надо один отрезок наложить (обыкновенно сначала учащиеся говорят „сложить“ или „приложить“ — надо показать, что эти слова здесь неуместны) на другой так, чтобы одни концы этих отрезков совпали (чтобы привести учащихся к этому, приходится показать на палочках и такое наложение, какое дано на черт. 12); 3) надо, чтобы учащиеся применили вышеизложенное словесное описание процесса выполнения сравнения двух отрезков к отрезкам, данным на черт. 13: надо наложить отрезок AB на отрезок CD так, чтобы точка A совпала с точкою C, и посмотреть, куда упадет



Чер. 12. Чер. 13.

точка B; если точка B совпадет с точкою D, то $AB = CD$, если точка B ляжет на самом отрезке CD (внутри его), то $AB < CD$, если точка B ляжет на продолжении отрезка CD (вне его), то $AB > CD$. Полезно бывает все это записать, хотя бы и коротко, причем учащиеся здесь ознакомятся со знаками $<$ и $>$.

Далее учащиеся, вспоминая, что они могут иллюстрировать сложение двух чисел сдвижением двух групп (кучек) предметов (например, орехов) в одну, легко приходят к возможности выполнить сложение двух отрезков, и, конечно, сначала выполняют его на палочках, сдвигая их так, чтобы из двух отрезков (палочек) получить один. Затем переходят к черт. 14 и выясняют в конце концов (переходные стадии таковы же, как и при сравнении двух отрезков), что для сложения отрезков AB и CD надо перенести отрезок AB так, например, чтобы точка A совпала с D и самый отрезок AB пошел бы по прямой линии, на которой расположен отрезок CD (короче: по продолжению отрезка CD); если тогда точка B попадет в точку E, то $DE = AB$ и $CD + DE = CE$ или $CD + AB = CE$.



Чер. 14.

Так же точно, начиная с палочек, нетрудно привести в ясность те операции, какие нужны для выполнения вычитания отрезков.

В соответствующие моменты на протяжении всех этих занятий учащиеся должны выполнить ряд упражнений. Вот наиболее существенные из них.

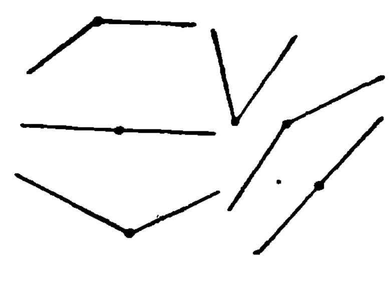
1. Учащиеся должны ознакомиться с употреблением циркуля, как орудия, при помощи которого можно **взять** отрезок и **переносить** его куда угодно.

2. Учащиеся должны на самом деле при помощи циркуля выполнить сравнение нескольких отрезков, а также сложение и вычитание.

3. Учащиеся должны привыкать видеть сложение и вычитание отрезков. Так, на прилагаемом чертеже $\overline{A\qquad B\qquad C}$ учащиеся должны видеть (и уметь это записать) и сложение двух отрезков ($AB+BC=AC$), причем должны показывать и каждый слагаемый отрезок и сумму, и вычитание ($AC-AB=BC$ или $AC-CB=BA$), причем должны показать и уменьшаемый отрезок и вычитаемый и разность.

4. Учащиеся должны уметь данный отрезок разлагать на слагаемые, а также данный отрезок представлять в виде разности, для чего надо продолжить отрезок до какой-нибудь точки и записать, что данный отрезок есть разность двух вновь полученных отрезков.

Все эти упражнения необходимы, так как должно стремиться к тому, чтобы в будущем, когда придется иметь дело с более сложными комбинациями, учащиеся легко могли бы смотреть на известный отрезок, как на сумму или разность других отрезков.



Чер. 15.

Переходим к углам. Строится несколько раз учащимися фигура, состоящая из точки и двух лучей, из этой точки выходящих (чер. 15). Каждой из этих фигур дается название „угол“.

Учащиеся устанавливают, что они умеют строить угол: надо построить точку и из нее 2 луча. Вводятся названия: „вершина

угла", „стороны угла"; последние показываются палочкою — ученики проводят ею от вершины по соответствующему лучу.

Выясняется, что стороны углов идут без конца, а поэтому угол остается тот же, если стороны „нарисовать" или немного длиннее или короче.

Среди углов, оказывается, имеется особый угол. Учащиеся могут установить его существование или из рассмотрения различных углов, построенных ими самими (на доске), — см. предыдущий чертеж — или при помощи опыта вращения палочки (чер. 16).

Держим палочки рукою в том месте, где они сходятся, и одну из них вращаем. Особенный угол получается тогда, когда стороны угла окажутся расположенными по прямой линии (эта особенность подмечается самими учениками и высказывается ими).



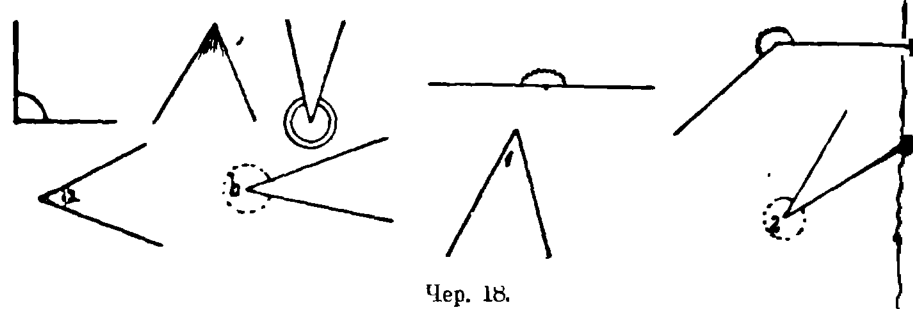
Чер. 16. Чер. 17.

Называем этот особенный угол именем „выпрямленный" или „развернутый"; показываем его вершину и стороны; строим простейшим способом выпрямленный угол (прямую линию и на ней точку). Учащиеся упражняются в обозначении углов при помощи трех букв.

Далее должно обратить внимание на тот факт (и желательно, чтобы учащиеся сами это увидали), что плоскость делится углом на 2 области (на 2 части) — см. чер. 17, где одна область затушевана. Про одну из этих областей мы говорим, что она лежит в н у т р и угла (внутренняя область угла), а о другой, — что она лежит в н е угла (внешняя область). Какую именно счесть за внутреннюю область, а какую за внешнюю — это безразлично. Если мы возьмем кусок бумаги, изображающий собою плоскость, если на нем построим угол и разрежем этот кусок по сторонам угла, то плоскость разделится на 2 части.

Чтобы рассматривать угол, приходится рассматривать одну из этих частей, а какую именно — безразлично: на каждой из них

можно показать и вершину и стороны угла. Станем теперь рассматривать углы с присоединенными к ним внутренними областями (чер. 18). Чтобы на чертеже видеть, какую именно часть плоскости мы принимаем за внутреннюю область угла (и присоединяем ее к углу), условимся отмечать эту область каким-либо способом: или рисовать по этой области какую-нибудь кривую от одной стороны до другой или немного затушевывать эту область или, что в дальнейшем чаще всего будет встречаться, на этой области будем ставить ту малую букву или цифру, которыми будем иногда называть рассматриваемые углы.



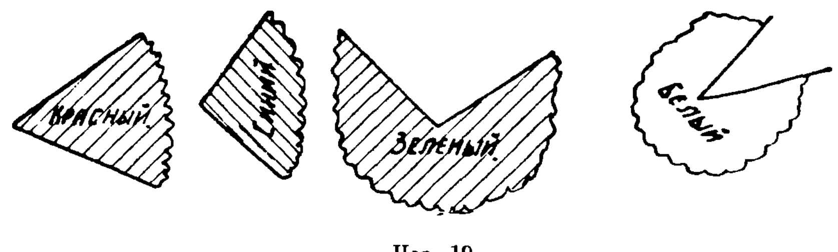
Чер. 18.

Последние 4 угла называем: угол *a*, угол *b*, угол первый, угол второй. Вводим знак, заменяющий слово „угол“ и получаем $\angle a$, $\angle b$, $\angle 1$ и $\angle 2$.

Приступаем к сравнению углов: если имеем два угла, то можно установить, что или эти углы равны или неравны и в последнем случае один угол больше другого. Следует привести в отчетливость тот процесс наложения одного угла на другой, при помощи которого это делается. Для этой цели удобно сначала иметь дело с моделями углов, вырезанных из цветной бумаги (каждая модель дает угол с его внутреннею областью) (чер. 19).

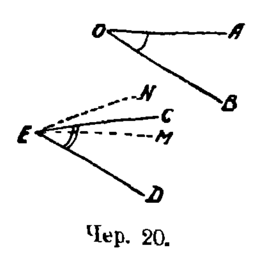
Налагаем красный угол на синий. Признаем, что синий угол больше красного, потому что при наложении одного угла на другой окажется, что красная область целиком укладывается на синей (должно ведь воображать, что там, где обрез дан зигзагообразною линиею, плоскость идет без конца), да еще часть синей остается незакрытою. Также установим, что синий меньше зеленого, что зеленый меньше белого (конечно, говоря это, мы при-

меняемся к тому, что дано на вышеприведенном чертеже). Итак, устанавливается: для сравнения двух углов надо наложить один угол на другой так, чтобы 1) их вершины совпали, 2) совпало бы по одной стороне и 3) внутренняя область одного угла покрыла бы хотя бы часть внутренней области другого. Если окажется, что внутренние области обоих углов совпадают, то эти углы равны, а если часть внутренней области одного угла остается непокрытою, то углы неравны и тот угол больше, внутренняя область которого остается незакрытою.



Чер. 19

Все это можно записать, применяясь к чертежу. Например, возьмем $\angle AOB$ и $\angle CED$ (см. чер. 20), внутренние области которых отмечены. Перенесем $\angle AOB$ так, чтобы точка O совпала с точкой E, чтобы сторона OB пошла по лучу ED и чтобы внутренняя область $\angle AOB$ пошла бы по внутренней области $\angle CED$. Тогда сторона OA может расположиться по разному: если OA совпадет с EC, то $\angle AOB = \angle CED$; если луч OA пойдет внутри $\angle AOB$ (например, по лучу EM), то $\angle AOB < \angle CED$; если луч OA пойдет вне угла CED (например, по лучу EN), то $\angle AOB > \angle CED$.



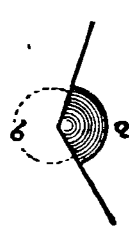
Чер. 20.

Во время упражнений с равными и неравными углами удобно установить, в каком смысле употребляется в геометрии термин „равные фигуры“.

Построив на плоскости угол, мы теперь можем считать, что получим два угла, в зависимости от того, какую из двух областей

примем за внутреннюю. Если (см. чер. 21) примем за внутреннюю область затушеванную, то получим $\angle a$, а если незатушеванную, то — $\angle b$.

Применительно к чертежу мы получим, что $\angle a < \angle b$. Вообще говоря, таким способом мы получаем два неравных угла. Возникает вопрос, а не получится ли когда-нибудь два равных угла. Находится ответ: равные углы получим тогда, когда построим выпрямленный угол. Если теперь присоединим еще сюда ясное для каждого наблюдающего положение, что какие бы выпрямленные углы мы ни построили, они могут быть наложением совмещены, то явится возможность: 1) установить — „все выпрямленные углы равны между собою“ и 2) разделить все углы на углы, бо́льшие выпрямленного, и на углы, меньшие выпрямленного. Вводится, наконец, условие: если построен угол и не отмечена его внутренняя область, то надо считать за эту внутреннюю область ту часть плоскости, которая дает угол, меньше выпрямленного. Это условие вводится потому, что по большей части приходится рассматривать углы, меньшие выпрямленного.

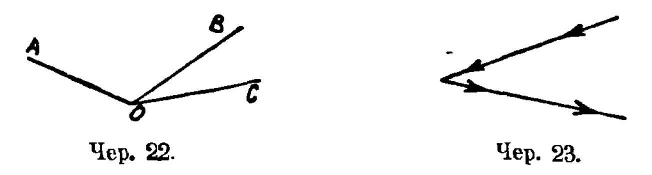


Чер. 21.

Здесь необходимы упражнения с вырезанными из бумаги моделями углов; оперируя с этими моделями, учащиеся учатся, 1) сравнивать два угла, 2) отличать сразу углы, большие выпрямленного, и углы, меньшие выпрямленного (полезно, хотя обычно это и не принято, сравнение углов не ограничивать только углами, меньшими выпрямленного). Также точно желательны упражнения вроде следующего: построен угол (например, ∧), отметить его внутреннюю область так, чтобы получился: 1) угол, меньший выпрямленного, или чтобы получился 2) угол, больший выпрямленного.

Переходим далее к сложению и вычитанию углов. Здесь имеют место соображения, аналогичные данным при описании методики сложения и вычитания отрезков. Так же точно надо привести в отчетливость процессы сложения и вычитания углов (их описание пропускаем), выработать хотя бы некоторый навык видеть на

чертеже сумму и разность углов. Так, при условии, что имеём дело лишь с углами, меньшими выпрямленного, мы на чер. 22 видим: 1) $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ (следует каждый слагаемый угол и угол-сумму показывать; при этом это показывание полезно выполнять палочкою, проводя ее, как показывает стрелка



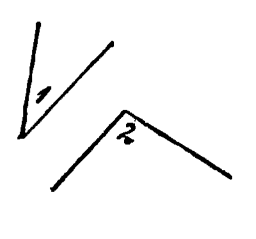
Чер. 22. Чер. 23.

(чер. 23), по сторонам угла); 2) $\angle AOC - \angle AOB = \angle BOC$ и 3) $\angle AOC - \angle COB = \angle BOA$ (также надо показывать уменьшаемый угол, вычитаемый и угол-разность).

Как можно подметить, все вышеизложенное направляется идеею, что и отрезки и углы суть самостоятельные объекты, с которыми мы учимся выполнять известные операции, не стремясь сводить дело к арифметике, к числам.

Сложение и вычитание углов также должно начаться с выполнения соответствующих процессов над моделями углов, вырезанными из бумаги.

Упражнение: даны два угла, $\angle 1$ и $\angle 2$ (чер. 24), найти их сумму (или разность), — может быть или выполняемо теперь при помощи изготовления бумажных моделей данных углов или может быть отнесено к более позднему моменту курса, к тому именно, когда будет введен в дело круг и установлена возможность строить при помощи кругов угол, равный данному.

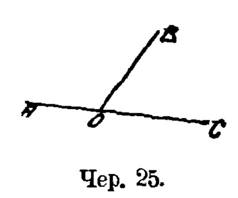


Чер. 24.

Упражняясь над сложением углов, учащиеся могут притти к установлению возможности случая, когда от сложения двух углов в сумме получается выпрямленный угол. Установить такую возможность можно опять-таки при помощи операций над моделями углов, а затем построить соответствующий чертеж.

Здесь, как то уже было указано в n°6, можно дать название „смежные“ углы (чер. 25), описать их расположение (общая вершина, одна

сторона общая, а две другие составляют прямую линию), но здесь нет места каким-либо доказательствам каких-либо теорем.



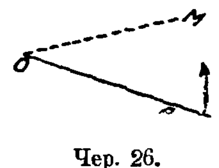
Чер. 25.

Далее ставится на очередь задача дополнить данный угол до выпрямленного. В n° 3 (стран. 17) уже выяснено, что решение этой задачи приводит к установлению свойства вертикальных углов. Поэтому здесь на этом не останавливаемся.

10. Круг; его применения.

Является теперь возможным установить иной взгляд на получение угла: каждый угол можно рассматривать, как результат вращения луча вокруг точки. Если мы имеем луч *OA* и, отметив его исходное положение, станем его вращать вокруг точки *O* (по плоскости), то, дойдя, например, до положения *OM* этого вращающегося луча, получим $\angle AOM$, явившийся результатом этого вращения (чер. 26).

Обратив внимание на какую-либо точку *A* этого луча *OA*, мы видим, что эта точка описывает во время вращения луча некоторую линию. Называем ее именем „круг“ или „окружность“. Так как точки *O* и *A* определяют отрезок *OA*, то устанавливаем

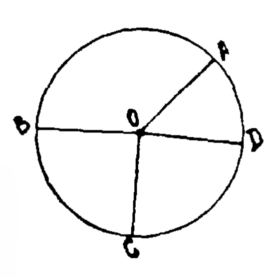


Чер. 26.

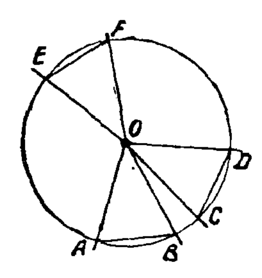
возможность получения окружности вращением отрезка около одного из его концов. Строим круг при помощи циркуля (ножки циркуля являются как бы концами воображаемого отрезка) и вводим термины: центр, радиус, диаметр, площадь круга (или окружности), понимая под этим именем часть плоскости, ограничиваемую кругом (или окружностью), дуга и хорда. Является также возможным установить деление всех точек плоскости на точки внутри круга, на круге и вне круга. Легко также явится возможным установить возможность иметь на одном круге равные и неравные дуги.

Итак, круг рассматривается нами, как линия, которую опишет, например, точка *A* при вращении отрезка *OA* около *O* (чер. 27).

Но ясно, что мы получим все то же самое, если начнем вращение с радиуса OB (а не OA) или с радиуса OC или OD и т. п. Это обстоятельство является указанием на полную симметрию круга относительно центра (для учащихся этот род симметрии приходится выражать фразами вроде: „в круге, куда из центра ни смотреть бы, все должно быть одинаковым“). Эта симметрия позволит установить, что если, например, построить в разных местах круга равные хорды ($AB = CD = EF$ . . .) (а это легко сделать при помощи циркуля, чер. 28) и соединить лучами концы этих хорд с центром O, то получим и равные дуги ($\smile AB = \smile CD = \smile EF = \ldots$) и равные центральные углы ($\angle AOB = \angle COD = \angle EOF =$ . . .). Также ясно, что если удастся построить при



Чер. 27.

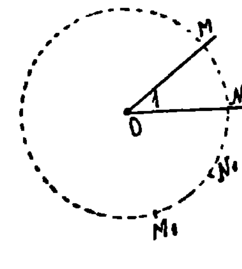


Чер. 28.

центре равные углы, то они высекут из круга равные дуги и определят собою равные хорды, стягивающие эти дуги. Итак, здесь устанавливается ряд положений: равным центральным углам в круге соответствуют равные хорды и равные дуги; равным хордам (или дугам) соответствуют равные центральные углы. Выясняется также, что бо̀льшему центральному углу соответствует большая дуга и т. п. Подробнее на этом останавливаться не приходится, и тем более не следует из этих положений делать теоремы, подлежащие доказательствам, цель педагогического достижения здесь такова—должно сделать каждому ученику: 1) ясною симметрию круга относительно центра и 2) ясным, что из этой симметрии вытекают вышеуказанные положения.

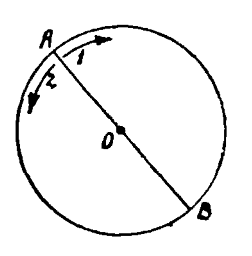
Выясненными свойствами можно пользоваться для построения угла, равного данному, сначала при той же вершине, а затем,

когда уяснится (а это делается легко, мимоходом), что круги с равными радиусами равны (конгруэнтны) и при разных вершинах (чер. 29). Пусть имеем $\angle 1$; приняв его вершину за центр, строим круг произвольным радиусом, на этом круге определится дуга MN (или хорда MN, не построенная на чертеже), перенесем при помощи циркуля эту хорду (или дугу) на другое место круга, например, в положение $M'N'$, соединим концы этой хорды с центром, и мы должны получить угол, равный $\angle 1$. Затем строим круг тем же радиусом, принимая за центр иную точку (а не точку O), после чего является возможным получить угол, равный $\angle 1$ при другой вершине [1]). Вводятся упражнения: 1) построить угол, равный данному, при данной вершине так, чтобы одна его сторона шла по данному лучу; 2) построить сумму или разность двух заданных углов (имеющих разные вершины).



Чер. 29.

Далее, также опираясь на получение круга вращением отрезка, можно установить симметрию круга относительно диаметра: безразлично, вращать ли луч OA для получения круга по стрелке 1 или по стрелке 2 (чер. 30). Отсюда явствует, что части круга, расположенные по разные стороны диаметра AB, тождественны: если плоскость перегнуть по диаметру AB, то одна часть круга совпадет с другою.



Чер. 30.

Удобно, напомнив учащимся одну из их любимых забав в детстве (а именно: капнуть несколько капель чернил на лист бумаги, перегнуть его, размазать и, развернув его вновь, получить фигуру, симметричную относительно линии перегиба), здесь установить общее понятие о симметрии фигур относительно оси: если

---

[1]) В моем курсе (Н. Извольский.—«Геометрия на плоскости») была избрана иная система. Опыт показывает мне предпочтительность системы, излагаемой в настоящей книге; поэтому в 3-м издании «Геометрия на плоскости» я провожу эту систему.

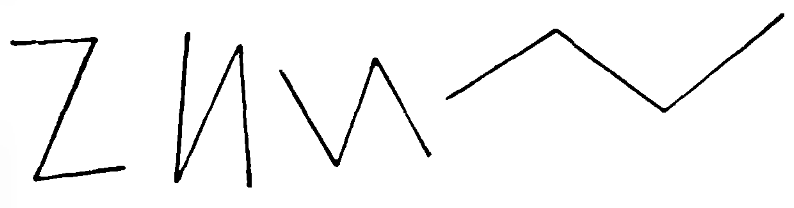
при перегибании плоскости по прямой линии одна часть какой-либо фигуры совпадает с другой, то эта фигура симметрична относительно прямой перегиба или эта прямая (перегиба) есть ось симметрии фигуры. Для круга осью симметрии может служить любой диаметр.

Если рассмотреть теперь фигуры (их можно строить по разному), состоящие из двух кругов, то учащиеся должны суметь найти ось симметрии каждой из этих фигур. Здесь уясняется симметрия точек пересечения двух кругов относительно их линии центров.

11. Параллельные прямые.

Напомнив учащимся, что прямая линия определяется двумя точками, и обратив их внимание на то, что до сих пор мы имели дело с прямыми, имеющими одну общую точку (пересекающимися в одной точке), явится возможным поставить на очередь вопрос: а нельзя ли построить две прямые так, чтобы они вовсе не имели общих точек (не пересекались бы?). Хорошо, конечно, было бы повести предварительную беседу так, чтобы этот вопрос пришел на мысль самим учащимся.

Придется здесь не добиваться, чтобы учащиеся сами нашли ответ на этот вопрос, а дать его в готовом виде, причем предварительно придется упражнять учащихся в р и с о в а н и и зигзагов вроде (чер. 31):



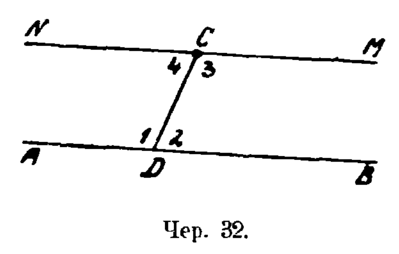
Чер. 31.

Даем получаемым здесь углам название в н у т р е н н и е н а к р е с т л е ж а щ и е. Добиваемся, чтобы образ этих углов запечатлелся в воображении учащихся.

Затем ставим интересующий нас вопрос в такой форме[1]). Имеем

[1]) Другая форма изложения дана в моей «Геометрии на плоскости», 3-е издание.

прямую AB и точку C вне ее, — нельзя ли построить через точку C такую прямую, чтобы она не пересекалась с AB (не имела бы общих точек?). Сообщаем учащимся следующее построение (чер. 32).



Чер. 32.

Строим: 1) через C любую прямую к какой-либо точке D прямой AB (короче: секущую CD), — получим $\angle 1$ и $\angle 2$; 2) принимая точку C за вершину, $\angle 3 = \angle 1$ так, чтобы эти углы были внутренние накрест лежащие, — получаем луч CM; 3) луч CN, продолжение CM, — получаем прямую NM и $\angle 4$. Разучим полученную фигуру.

Мы видим: 1) $\angle 1$ и $\angle 2$ углы смежные или $\angle 1 + \angle 2 =$ $=$ выпрям. $\angle$

2) $\angle 3$ и $\angle 4$ углы смежные или $\angle 3 + \angle 4 =$ $=$ выпрям. $\angle$

Мы знаем (так строили): $\angle 3 = \angle 1$.

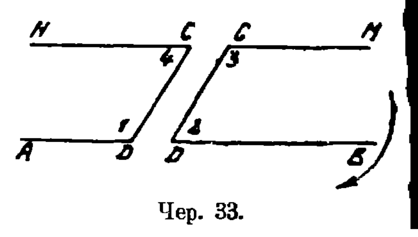
Отсюда заключаем: $\angle 4 = \angle 2$.

(Две суммы равны и у них по одному слагаемому имеем заведомо равными, след., и другие слагаемые должны быть равны).

На основании этого устанавливаем:

Если построено две прямых, пересеченных секущею так, чтобы пара внутренних накрест лежащих углов была равна, то и другая их пара тоже состоит из равных углов.

Продолжая изучение фигуры дальше, изображаем ее разрезанной по секущей CD и получаем две фигуры: левую $NCDA$ и правую $MCDB$ (чер. 33). Полезно иллюстрировать, как это разрезание, так и дальнейшее полоскою бумаги. Поворачиваем правую фигуру и накладываем ее на левую, чтобы точка D правой совпала с точкой C левой и точка C правой с точкой D левой. Принимая во внимание, что $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$, мы убеждаемся, что левая и правая фигура совпадают при наложении, т.-е. они равны.



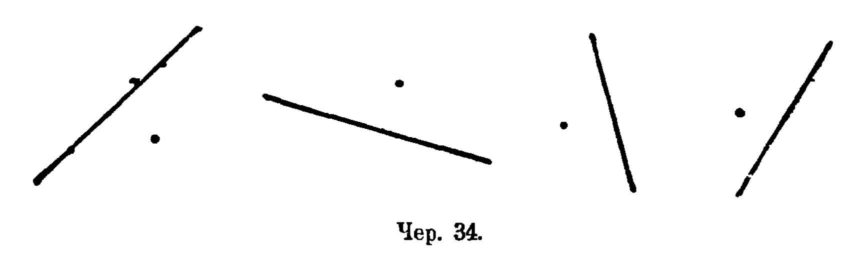
Чер. 33.

Отсюда уже легко видеть, что прямая *NM* не может иметь общей точки с прямой *AB*: если бы кто подумал, что эта общая точка расположена вправо от секущей *CD*, то, в силу равенства фигур, такая же общая точка должна была бы быть и влево, т.-е. через две точки проходило бы две прямых, что невозможно. Вводим термин „параллельные" прямые и устанавливаем:

1. Через точку вне прямой можно построить прямую, параллельную данной (остается открытым вопрос: сколько?).

2. Если две прямых пересечены секущею и оказалось, что внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямых параллельны.

Следует упражнять учащихся в построении через данную точку прямой, параллельной данной, при различном их расположении (чер. 34):



Чер. 34.

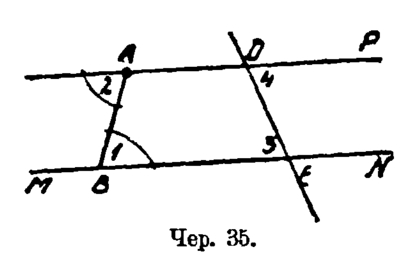
Затем является возможным поставить на очередь вопрос: сколько можно построить через точку *C* прямых, параллельных прямой *AB*? Исходным пунктом может послужить то обстоятельство, что для построения параллельной надо из точки *C* строить сначала секущую *CD*, а ее можно построить по разному, — возникает вопрос, будут ли или нет все получаемые прямые совпадать с прямой *NM*? Ответ на этот вопрос дается только на основании представления, и получаем постулат Евклида о параллельных в форме, которая теперь пользуется наибольшим распространением: через точку вне прямой можно построить лишь одну прямую, параллельную данной.

Мимоходом придется рассмотреть два следствия из этого постулата: 1) если прямая пересекает одну из параллельных, то она пересекает и другую и 2) две прямые, параллельные в от-

дельности третьей, параллельны между собою. По поводу последнего из них следует заметить, что учащиеся сейчас же соглашаются признать его справедливость, но возникает сомнение, делают ли они это на основе яркого представления или на основе слов „две прямые, параллельные 3-ей, параллельны между собою". Чтобы показать им необходимость разобраться в этом вопросе, полезно обратиться к соотношениям, имеющим место в жизни: 1) если 2 человека знакомы каждый с третьим, то следует ли отсюда, что эти два человека знакомы между собою? 2) Если 2 лица суть родственники третьему, то обязательно ли, чтобы эти 2 лица были и между собою родственники?

Больше внимания надо уделить третьему следствию из постулата: если построены 2 параллельных прямых и пересечены какою-либо секущею, то обязательно внутренние накрест лежащие *углы равны между собою.*

Дело можно поставить следующим образом. Пусть надо через точку *A* построить прямую, параллельную *MN* (чер. 35). Строим секущую *AB* и $\angle 2 = \angle 1$; тогда $AP \parallel MN$. Пересечем затем наши параллельные новою секущею *DE*; возникает вопрос, будут ли равны между собою, напр., $\angle 3$ и $\angle 4$.



Чер. 35.

Следующее соображение (доказательством его не следует называть) дает ответ на этот вопрос. Если бы мы взяли сначала не точку *A*, а точку *D*, и через нее захотели бы построить прямую, параллельную *MN*, то могли бы воспользоваться секущею *DE* и должны были бы при точке *D* построить угол, равный $\angle 3$, и внутренний накрест лежащий с ним, и тогда пришли бы к той же прямой *ADP*, потому что через точку *D* можно построить лишь одну прямую $\parallel MN$. Это указывает на необходимость того, чтобы $\angle 4 = \angle 3$.

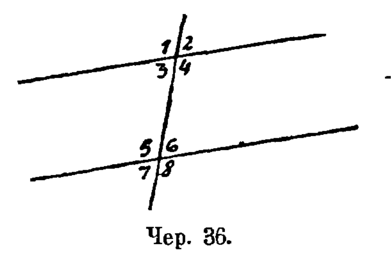
Далее явится возможным рассмотреть все 8 углов, получаемых от пересечения параллельных секущею. Ясно, что их можно разделить на 2 группы, равных между собою (чер. 36):

1) ∠1 = ∠4 (вертикальные) = ∠5 (внутр. накр. лежащие) = ∠8 (вертикальные).

2) ∠2 = ∠3 (вертик.) = ∠6 (вн. накр. леж.) = ∠7 (верт.), Но угол одной группы не обязан равняться углу другой.

Далее мы видим, что, напр., ∠1 и ∠2 сложены между собою и их сумма есть выпрямленный угол, т.-е. ∠1 + ∠2 = выпрямл. углу.

Если здесь ∠1 или ∠2 или оба заменить каким-либо равным углом (из той же группы, к какой этот ∠ принадлежит), то сумма не изменится.

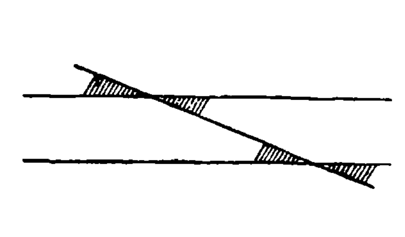


Чер. 36.

Напр. ∠1 + ∠2 = выпр. углу, но ∠1 можно заменить равным ему ∠8-м и ∠2 углом 3-м. Получим: ∠8 + ∠3 = выпр. углу.

Устанавливается общее положение: если возьмем один угол из одной группы и один из другой, то их сумма равна выпрямленному углу.

Следует учащихся упражнять в умении при разных обстоятельствах ясно отличать углы этих двух групп, для чего полезно требовать от них чертежей (от руки) вроде следующего (чер. 37) (углы одной группы затушеваны).


Чер. 37.

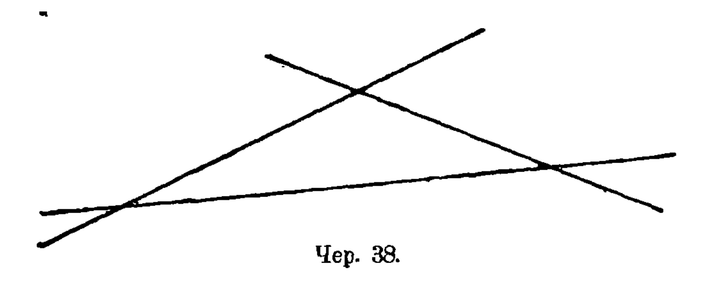
Во время этих упражнений явится возможным ввести в дело и внешние накрест лежащие углы и соответственные и внутренние (или внешние) односторонние и устанавливать их свойства.

Также явится возможным изменить и способ построения параллельных прямых, так как станет ясным, что вовсе не обязательно строить равные внутренние накрест лежащие углы, а можно получить параллельные прямые и при помощи построения равных соответственных углов или равных внешних накрест лежащих.

Наконец, придется остановиться на рассмотрении углов с попарно параллельными сторонами.

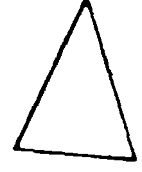
12. Треугольники.

Мы уже имели фигуру, состоящую из двух прямых, пересекающихся в какой-либо точке (вертикальные углы). Усложним ее: присоединим к ней третью прямую, пересекающую две первых в каких-либо новых точках (чер. 38).



Чер. 38.

Рассматривая эту фигуру, учащиеся должны установить: 1) эта фигура состоит из 3 прямых и 3 точек их пересечения (даем названия: треугольник для всей фигуры, его стороны, его вершины); 2) на каждой прямой получается по одному отрезку)каждый из этих отрезков называется также стороною треугольника; в дальнейшем, когда придется употреблять термин „сторона", из характера вопроса делается ясным, идет ли речь о бесконечной прямой или об отрезке на этой прямой); 3) при каждой точке (вершине) определяется по 4 угла, каждый из которых меньше выпрямленного; 4) плоскость делится на 7 областей, из которых 6 уходят в бесконечность, а 7-ая ограничена со всех сторон — эта последняя часть называется площадью треугольника. После этого явится возможным выделить из вышеуказанных 12 углов те, **внутри которых лежит площадь треугольника**, — называем эти углы внутренними углами треугольника.



Чер. 38-а.

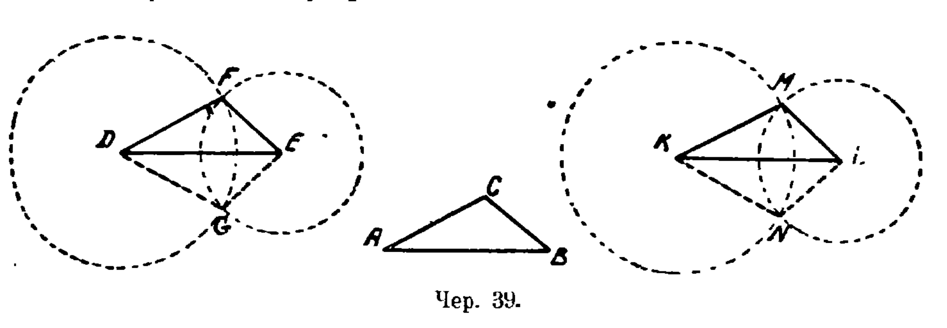
Так как во многих вопросах приходится рассматривать только отрезки сторон между вершинами и только внутренние углы, то общеупотребителен сокращенный чертеж треугольника (чер. 38-а):

Если бы понадобился ответ на вопрос, что называется треугольником, то все предыдущее приводит к ответу, что треуголь-

ником называется фигура, состоящая из трех прямых, пересекающихся в трех точках. Однако, чтобы работать над треугольником, нет надобности в определении, а достаточно сознания: я умею строить треугольник, причем возможно (на это важно обратить внимание) двоякое начало построения: 1) можно начать с построения трех точек (вершин), и они, взятые попарно, определят 3 прямых (стороны треугольника); 2) можно начать с построения трех прямых, и тогда само собою определяются 3 вершины треугольника.

Ставим на очередь задачу: построить треугольник, имеющий стороны, равные сторонам данного треугольника (под именем „сторона" здесь понимается отрезок).

При помощи циркуля решаем задачу, и полезно выполнить 2 построения, в двух разных местах плоскости.



Чер. 39.

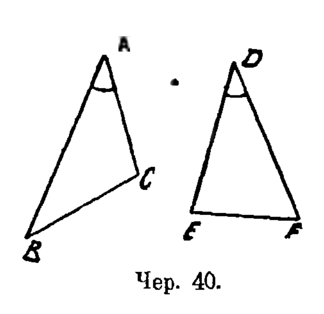
Наблюдательность дожна здесь привести к следующим заключениям (чер. 39):

1. При всяком построении получаются два треугольника (напр., $\triangle DFE$ и $\triangle DGE$). Так как фигура, состоящая из двух кругов, имеет ось симметрии (DE или для другой фигуры KL), то $\triangle DFE$ при перегибании по оси симметрии совпадет с $\triangle DGE$ — — всякий раз, следовательно, получается 2 равных треугольника.

2. Систему кругов с центрами K и L можно совместить с системою кругов D и E (ибо $KL = DE$ и радиусы кругов попарно одинаковы); поэтому $\triangle KML$ должен совместиться с $\triangle DFE$ и $\triangle KLN$ с $\triangle DGE$, т.-е. все треугольники с равными сторонами должны быть равны между собою. Получаем, следовательно, основной признак равенства треугольников: если стороны одного

треугольника равны соответственно сторонам другого, то эти треугольники равны.

Выяснение двух других основиых признаков равенства треугольников полезно начать с изучения процесса наложения одного треугольника на другой: 1) если у них есть по одному равному углу и 2) если у них есть по одной равной стороне.



Чер. 40.

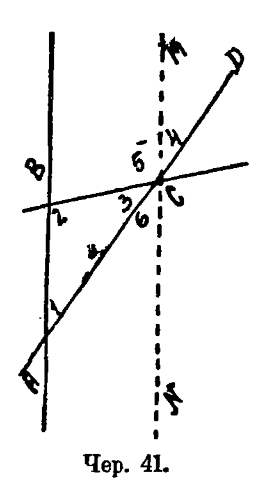
Напр., построим 2 треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle DEF$ (чер. 40) так, чтобы $\angle D = \angle A$, но $AB > DE$ и $AC < DF$. Учащиеся должны нарисовать, как расположится $\triangle DEF$, если его наложить на $\triangle ABC$ при условии совмещения равных углов. Далее, деформируя стороны DE и DF треугольника DEF, учащиеся должны установить, что для совпадения этого треугольника с $\triangle ABC$ достаточно так изменить стороны DE и DF, чтобы $DE = AB$ и $DF = AC$.

Так же разбирается и случай равенства треугольников по стороне и двум прилегающим к ней углам. Случай равенства треугольников по двум сторонам и углу против большей из них вводить в курс вовсе не нужно — это возможно лишь по окончании общего курса геометрии для тех, кто специально хочет заниматься геометриею.

Учащиеся должны освоиться с мыслью, что раз удалось установить равенство треугольников по равенству трех элементов этих треугольников, то и остальные элементы их равны; должны также освоиться с тем, как находить равные элементы (против равных сторон лежат равные углы и обратно). Учащиеся должны также упражняться в построениях треугольников: 1) по трем данным сторонам, причем они должны здесь подметить невозможность при известных условиях этого построения; 2) по двум сторонам и углу между ними и 3) по стороне и двум прилегающим углам — здесь должно остановиться на случае, когда сумма двух данных углов равна выпрямленному углу, и связать этот случай с тем, что они уже знают о параллельных прямых; также нельзя пропускать случая, когда сумма двух данных углов больше выпрямленного.

Во время этих построений явится возможность построения и равнобедренного и равностороннего треугольников, и явится потребность их изучения.

Далее мы подмечаем, что когда построен треугольник, то является случай применить построение прямой, параллельной данной, через данную точку (чер. 41). Напр., имеется прямая AB и точка C вне ее. Построив прямую $CM \parallel AB$, для чего можно воспользоваться или секущею CB и построить $\angle 5 = \angle 2$ или секущею AC и построить $\angle 6 = \angle 1$, мы должны добиться от учащихся отчетливого видения: 1) равных углов ($\angle 5 = \angle 2$, $\angle 6 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 1$ и т. п.), 2) что при точке C выполнено сложение углов, напр., $\angle 6 + \angle 3 + \angle 5 =$ выпрям. углу (или $\angle 4 + \angle 5 + \angle 3 =$ выпрям. углу).

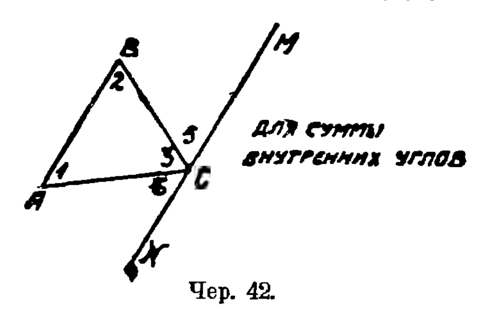


Чер. 41.

Отсюда, заменяя $\angle 6$ углом 1-м и $\angle 5$ углом 2-м, получим:

$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 =$ выпрямл. углу, т.-е. хотя $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$ на чертеже и не сложены, тем не менее, их сумма вполне определена и всегда равна выпрямленному углу.

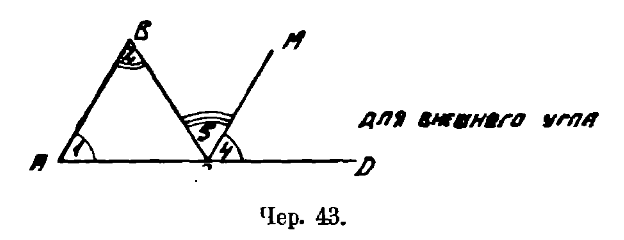
Далее здесь же можно остановиться на внешнем угле треугольника ($\angle BCD$) и увидать, что $\angle BCD = \angle 5 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 1$.



Чер. 42.

Полезно те части всего вышеприведенного чертежа, на какие надо в данный момент обратить особенное внимание, 1) обрисовы-

вать цветным карандашом (напр., отрезки AB, BC, CA и прямую NM, — здесь ведь надо обратить особое внимание, лишь на внутренние углы при точках A и B и на равенство их углам



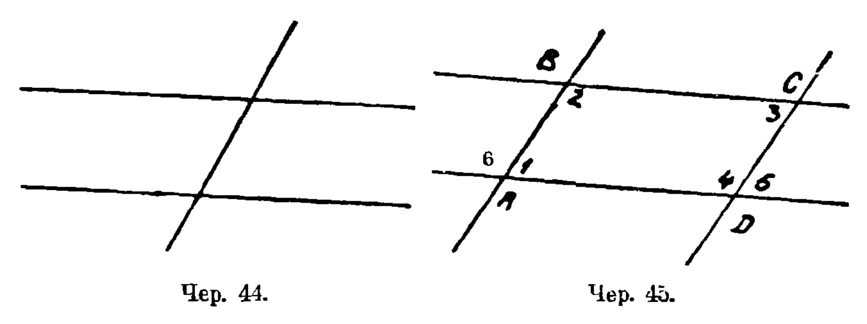
Чер. 43.

6-му и 5-му) и 2) давать частичные чертежи для рассматриваемого вопроса (чер. 42 и 43).

Необходимо также разнообразить построение, строя прямую, параллельную одной стороне треугольника, то через точку A, то через точку B, то через точку C.

13. Параллелограммы.

Построение параллельных прямых дает нам 3 прямых: 2 параллельных и одну секущую (чер. 44).



Чер. 44. Чер. 45.

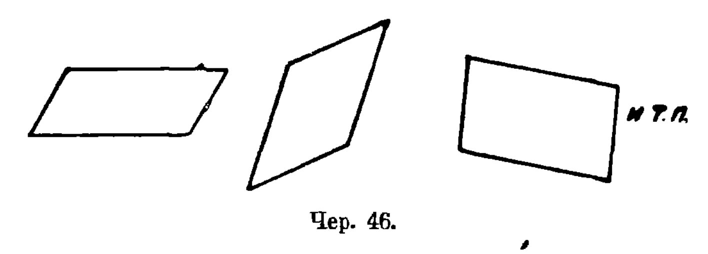
Возникает мысль усложнить фигуру: построить еще 4-ую прямую, параллельную секущей, — получим **параллелограмм** (чер. 45).

Учащиеся должны практиковаться и в построении и в рисовании от руки параллеограммов различной формы.

Изучаем полученную фигуру (параллеограмм). Сначала обращаем внимание на углы. Учащиеся должны видеть, что $\angle 1 = \angle 3$

(при помощи $\angle 5$), что $\angle 2 = \angle 4$ (при помощи, напр., $\angle 6$), что $\angle 1 + \angle 2 =$ выпрямл. углу, $\angle 1 + \angle 4 =$ выпрямл. углу и т. д.

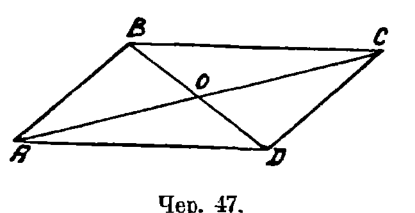
У параллеограмма 4 вершины и 4 стороны, на каждой прямой определяется отрезок, который также называется стороною. Если обращаем внимание только на эти отрезки и на внутренние углы



Чер. 46.

(внутри которых лежит площадь параллеограмма), то удобно изображать параллеограммы в виде (чер. 46).

Дальнейшее изучение параллеограммов начинается с соображения: у параллеограмма 4 вершины, сколько прямых определяется этими четырьмя точками? (Аналогичный жизненный вопрос: четверо встретились и обменялись рукопожатиями, сколько вышло рукопожатий?). Когда выяснится, что 6 прямых, то надо построить 2 недостающих. Получим фигуру, изображенную на чер. 47.

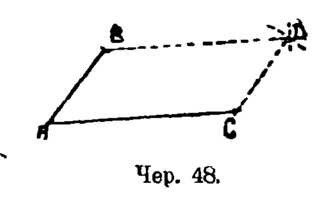


Чер. 47.

Получились знакомые фигуры — треугольники. На вопрос, сколько здесь вы видите треугольников, учащиеся часто отвечают: „4“. И только некоторые, более наблюдательные, видят здесь больше 4-х треугольников. Наконец, выясняется, что здесь 8 треугольников: 4 „больших“ и 4 „малых“. Обращаем внимание сначала на „большие“ и ставим вопрос: нэт ли среди них равных? Учащиеся, нарисовав от руки несколько различных параллелограммов, подмечают непосредственно, что **вероятно** соседние большие треугольники равны (напр., *ABD* и *DBC*). Выясняется справедливость или несправедливость этого „подозрения“. Оказывается, что в $\triangle ABD$ и $\triangle DBC$ общая сторона BD и заведомо

равны попарно углы, к ней прилегающие,—этого достаточно, чтобы быть убежденным в равенстве треугольников. Отсюда получаем свойство параллелограмма, что его противоположные стороны равны.

Это свойство зарождает мысль о новом, более удобном построении параллелограмма (чер. 48). Строим произвольно 3 вершины параллелограмма—A, B и C—и строим заранее 2 его стороны AB и AC. Остается найти четвертую вершину. Так как сторона, идущая из $B \parallel AC$, должна быть равна AC, то строим, принимая B за центр и AC за радиус, круг (или только дугу); также, принимая C за центр и AB за радиус, строим другой круг (или дугу). Из двух точек пересечения кругов выберем ту, чтобы, после соединения ее с B и C, выделился один кусок плоскости.



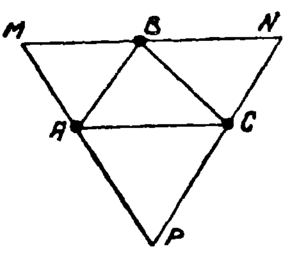
Чер. 48.

Пусть эта точка есть точка D. Тогда, соединив ее с B и C, получим параллелограмм. Само построение, в соединении со свойством сторон параллелограмма, дает уверенность в том, что действительно получился параллелограмм. Однако, возможно сделать и проверку. Последняя ясна из следующей схемы:

Мы знаем: 1) $BD = AC$
2) $CD = AB$ (так строили)

Параллельны ли между собою BD и AC? А также CD и AB? Построив диагональ BC и рассмотрев полученные треугольники, приходим к утвердительному ответу на поставленный вопрос.

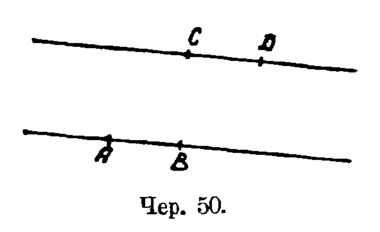
Очень интересно поставить на очередь общую задачу: „построить параллелограмм по трем дальным вершинам“ (чер. 49). Эта задача имеет 3 решения. Получаемая фигура дает возможность видеть: 1) можно получить треугольники ($\triangle MNP$ и $\triangle ABC$ или $\triangle AMB$), чтобы стороны одного были в 2 раза каждая больше сторон другого,—в таком случае площадь одного в 4 раза больше



Чер. 49.

площади другого; 2) можно видеть свойства средней линии треугольника. Исследование (и построение) этой фигуры является интересным для учащихся материалом целого урока.

Очень хорошо также (это нужно для дальнейшего) сообщить учащимся и такой способ построения параллелограмма (чер. 50): строим 2 параллельных прямых, на них 2 равных отрезка и концы этих отрезков соединяем так, чтобы выделить определенную площадь.

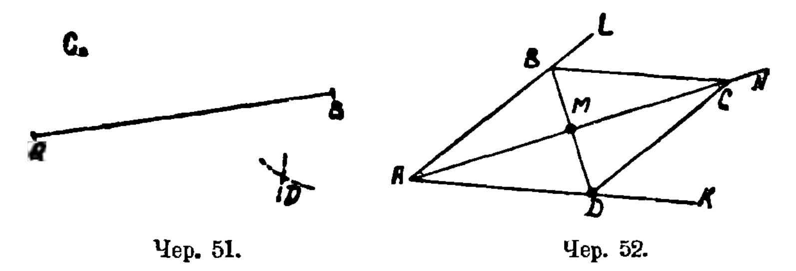


Чер. 50.

Переходим с учащимися, затем к рассмотрению малых треугольников, получаемых у параллелограмма. В том же порядке, какой выше дан для рассмотрения больших, приходим к свойству диагоналей параллелограмма.

Здесь мы впервые встречаемся со случаем деления отрезка пополам. Когда учащиеся это увидят, то для них возникнет задача: разделить данный отрезок пополам.

Решение этой задачи основывается на соображении (чер. 51): данный отрезок AB должен представлять собою диагональ параллелограмма; две противоположных вершины этого параллелограмма суть A и B; третью вершину C возьмем произвольно и построим при помощи кругов четвертую вершину D (чтобы $AD = CB$ и $BD = AC$). Тогда диагональ CD должна разделить пополам диагональ AB.

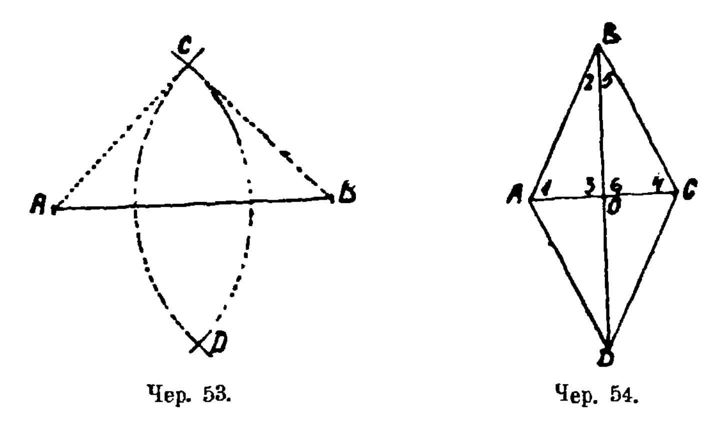


Чер. 51. Чер. 52.

Более внимательное изучение параллелограмма (однако, его очень трудно провести с учащимися, лишь начинающими учиться геометрии, и предпочтительнее отложить на дополнительный курс)

позволит увидеть происхождение (а, следовательно, и решение) задач (чер. 52): 1) дан угол ($\angle KAL$) и точка внутри его (точка M) - построить через эту точку прямую так, чтобы ее отрезок между сторонами угла делился в этой точке пополам. 2) Дан угол ($\angle LAN$) и точка вне его (точ. D); построить через эту точку прямую так, чтобы ее отрезок, заключенный между сторонами угла, равнялся отрезку от этой точки до ближайшей стороны угла.

Упражнения в делении отрезка пополам приводят к мысли о возможности упрощения этого построения: приходится строить 2 круга разными радиусами,—нельзя ли пристроить к данному



Чер. 53. Чер. 54.

отрезку параллелограмм только при помощи одного растворения циркуля? Ответ на этот вопрос приводит к особенному параллелограмму (ромб), у которого все стороны равны (чер. 53).

Заметим также, что упражнения в делении отрезка пополам должно вести так, чтобы стороны параллелограмма (или ромба), пристраиваемого к отрезку, не рисовались учащимися, а лишь показывались, а начертить необходимо лишь вторую диагональ.

Раз получен особый параллелограмм—ромб (чер. 54), то возникает вопрос, нет ли у него особенностей, как-либо отличающих его от обычного параллелограмма. Учащиеся подмечают, что, вероятно, у ромба все 4 маленьких треугольника равны. Следует выяснить, что новым в этом предварительном наблюдении является лишь равенство соседних маленьких треугольников (противопо-

ложные ведь равны у всякого параллелограмма). Делаем поверку: действительно оказывается, напр. у $\triangle AOB$ и $\triangle OBC$, что их стороны заведомо попарно равны. Предварительное наблюдение оправдалось. Отсюда заключаем, что и углы у этих соседних треугольников попарно равны: 1) $\angle 1 = \angle 4$, но это равенство ничего нового не дает, так как оно выражает знакомое свойство углов при основании в равнобедренном треугольнике ($\triangle ABC$ равнобедренный). 2) $\angle 2 = \angle 5$. Это обстоятельство дает нечто новое: $\angle ABC$ („весь" $\angle B$) ромба разделился пополам. Отсюда возникает задача: дан какой-нибудь угол; разделить его пополам. Решение задачи ясно из сравнения данного угла с ромбом: надо к данному углу пристроить ромб так, чтобы вершина угла служила бы одною вершиною ромба и чтобы две стороны ромба шли по сторонам данного угла. Таких ромбов пристроить к углу можно сколь-угодно много, и они будут отличаться друг от друга размерами своих сторон. Взяв за сторону ромба произвольный отрезок (определяемый концами раздвинутых ножек циркуля, подготовленного к построению ромба), мы этот ромб легко пристроим к углу: сначала на сторонах угла определяем еще 2 вершины ромба и, наконец, построением соответствующих дуг определяем и 4-ую вершину; сторон ромба строить нет надобности (но учащиеся должны их показывать), а надо построить ту его диагональ, которая идет из вершины данного угла. 3) $\angle 3 = \angle 6$ (продолжаем изучать соседние малые треугольники). Это равенство также дает новое, а именно: мы видим, что выпрямленный $\angle AOC$ разделился пополам. Вводим термены „прямой" угол (половина выпрямленного угла) и „перпендикулярные" прямые. Является возможность поставить на очередь задачи: 1) построить прямой угол и 2) построить 2 перпендикулярных прямых. Последняя задача развертывается в две: 1) дана прямая и точка на ней, построить через эту точку перпендикуляр к данной прямой и 2) дана прямая и точка вне ее; построить через эту точку перпендикуляр к данной прямой. Все эти задачи решаются пристройкою ромба к данным. Подробности того, как провести эти построения с учащимися, пропускаем, так как в них легко ориентироваться в связи с тем, что было дано здесь по поводу предыдущих построений.

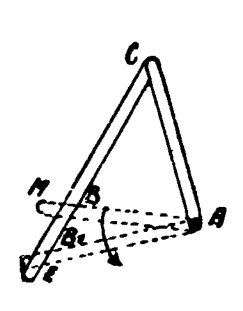
Раз получен еще особый угол, прямой, то возникает потребность строить особые и треугольники и параллелограммы, а именно—с прямыми углами. Здесь является возможным более подробное изучение прямоугольных треугольников: 1) как упрощаются общие признаки равенства для прямоугольных треугольников, 2) какие еще признаки равенства удобно ввести для прямоугольных треугольников.

Построив параллелограмм так, чтобы у него один угол был прямой, мы приходим к заключению, что все его углы прямые и переходим к изучению прямоугольника (все 4 „больших" треугольника равны), а затем и квадрата.

Соединение понятия о прямом угле с равносторонним треугольником дает возможность делить прямой угол на 3 равных части, а затем получать углы, равные $\frac{1}{6}d$, $\frac{5}{6}d$, $\frac{1}{12}d$, $\frac{5}{12}d$ и т. п. Можно к этому присоединить упражнения в вычислении 3-го угла треугольника по двум данным.

14. Неравные стороны и углы в треугольниках. Расстояние между двумя точками, между точкою и прямою и т. п. Геометрические места точек. Средние линии треугольников и четыреугольников.

Желательно вопрос о неравных сторонах и углах треугольника поставить так, чтобы перед учащимися отчетливо прошла картина возможной изменяемости треугольника. Для этой цели очень желательно обратиться к помощи модели (фиг. 55). Она состоит из двух неподвижных палочек AC и CE и одной подвижной AM, которая может вращаться около точки A. За исходный пункт примем то расположение, которое дает равнобедренный $\triangle ACB$. Известно, что если $AC = CB$, то $\angle A = \angle B$. Станем теперь $\angle A$ увеличивать, для чего палочку AM надо вращать по стрелке. Тогда ясно, что сторона CB станет увеличиваться. Относительно $\angle B$ можно рассудить, что он должен уменьшаться. Рассудить можно



Чер. 55.

двояко: 1) $\angle C$ остается неизменным. $\angle A$ увеличивается, а мы знаем, что всегда $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, отсюда следует, что $\angle B$ уменьшается; 2) новое положение стороны AB (а именно AB_1) вместе со старым дают возможность рассмотреть $\triangle ABB_1$, для которого старый $\angle B$ есть внешний, а новый $\angle B$ (или $\angle B_1$) есть внутренний; поэтому новый $\angle B <$ старого $\angle B$.

Итак, *мы получили новый* $\triangle ACB_1$, *в котором заведомо* 2 угла неравны ($\angle A > \angle B_1$) и мы видели, что сторона CB увеличивалась ($CB_1 > CB$), а AC оставалась неизменною, т.-е. $CB_1 > AC$, откуда и следует, что если в треугольнике 2 угла неравны, то против большего из них лежит и большая сторона.

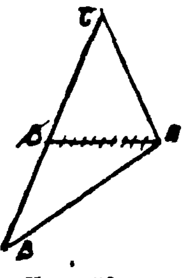
Здесь же ясно и обратное заключение: если в треугольнике две стороны не равны, то против большей из них лежит и больший угол. Возможно все это воспроизвести и только на чертеже, для чего построим сначала равнобедренный $\triangle$ (чер. 56) и запишем:

$$AC = CB \text{ и } \angle B = \angle A.$$

Затем сторону AB зачеркнем и вообразим ее повернутой в новое положение. Выяснив, как выше, что сделается со сторонами и углами старого $\triangle ACB$ при переходе его к новому $\triangle ACB$, запишем, что

для нового треугольника: $CB > AC$ и $\angle A > \angle B$.

Во время этого исследования постоянно придется иметь дело с положениями: „против равных сторон лежат равные углы", „против равных углов лежат равные стороны", „против большей стороны лежит больший угол" и „против большего угла лежит большая сторона".

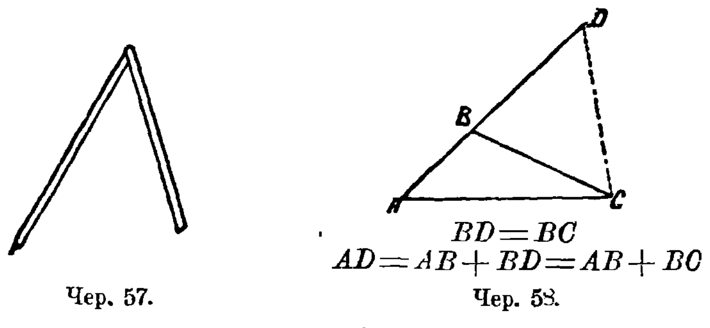


Чер. 56.

Необходимо, чтобы учащиеся усвоили, что эти положения относятся только к одному треугольнику. Возникает вопрос, а нельзя ли их отнести к двум треугольникам? И прежде всего ясно, что они справедливы для двух равных треугольников. Нельзя ли установить их справедливость при известных условиях и для двух неравных треугольников? Для этого возьмем 2 палочки, как на чер. 57; их общая точка и свободные их концы можно принять за вершины треугольника, две стороны которого

изображены палочками, а третья легко воспроизводится воображением, как прямолинейный отрезок, соединяющий два свободных конца. Если мы станем увеличивать (вращая одну из палочек) угол, составляемый двумя сторонами, то становится ясным, что и третья сторона должна увеличиваться; если мы станем раздвигать концы палочек, дабы увеличить третью сторону, то и угол, составляемый двумя неизменными сторонами, увеличивается.

Ясно, что здесь мы имеем дело с рядом треугольников, у которых две стороны неизменны, — у таких треугольников увели-



$$BD = BC$$
$$AD = AB + BD = AB + BC$$

Чер. 57. Чер. 58.

чение третьей стороны влечет за собою увеличение противолежащего угла и обратно: увеличение угла между неизменными сторонами влечет увеличение противолежащей стороны.

Если этому заключению хотят придать обычную форму— „если 2 стороны одного треугольника равны соответственно двум сторонам другого, а углы между ними не равны, то против большего угла лежит и большая сторона", то необходимо изобразить на чертеже два из треугольников, получаемых при выше разбираемом вращении, и для них явится возможным придать заключению указанную форму.

Вопрос о сравнении различных линий, соединяющих две точки, обычно развивается в естественном порядке. Сначала выясняется, что одна сторона треугольника меньше суммы двух других, причем естественно получить эту сумму, т.-е. выполнить сложение двух сторон треугольника, для чего и употребляют обычное построение (чер. 58). Естественно далее перейти к сравнению прямолинейного отрезка, соединяющего две точки, с периметром ломаной, соединяющей те же точки, и к сравнению двух ломаных

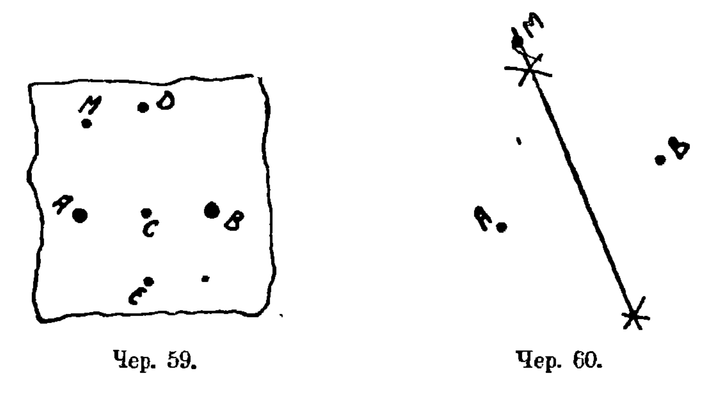
линий, соединяющих 2 точки („объемлемая“ выпуклая и „объемлющая“). Должно к этому прибавить возможность рассмотрения кривой линии, как ломаной, состоящей из бесконечно большого числа отрезков, дабы окончательно установить, что прямолинейный отрезок, соединяющей 2 точки, меньше всякой другой линии, соединяющей эти же точки (благодаря этому свойству, прямолинейный отрезок, соединяющий 2 точки, называется расстоянием между этими точками). Возможно этому заключению придать и такую форму: кратчайший путь между двумя точками идет по прямой линии, но следует бросить обычную форму—„кратчайшее расстояние между двумя точками есть прямая линия“. В самом деле, между двумя точками существует лишь одно расстояние (напр., „расстояние земли от солнца“) и нет смысла говорить слово „кратчайшее“, потому что оно предполагает выбор между несколькими расстояниями.

По поводу всего сказанного возникает одно сомнение. Ведь все те вопросы, какие здесь затрагиваются, очень сближены с повседневным опытом, и результаты исследования этих вопросов, в сущности, ученикам не дают почти ничего, что не заключалось бы в имеющемся у них жизненным опытом. Поэтому возникает сомнение, следует ли все это развивать в той или иной системе? Не достаточно ли все это закрепить в сознании учащихся, как данные, почерпнутые из постоянного жизненного опыта? Быть может, для разных учеников, в зависимости от имеющогося времени, это сомнение должно разрешаться по разному.

Во всяком случае, в курс вводится: понятие о расстоянии между двумя точками, и это обстоятельство дает начало ряду вопросов, первым из которых является „много ли можно найти на плоскости точек, имеющих данное расстояние от данной точки? Где эти точки расположены?“ —Здесь приходим к взгляду на круг, как на геометрическое место точек, равноудаленных от центра. Вторым вопросом является вопрос о точках плоскости, равноудаленных от двух данных точек. Рассмотрение этого вопроса удобно вести в следующем порядке.

Пусть лист бумаги изображает плоскость (чер. 59), на нем рисуем 2 точки, чтобы они были ясно видны классу, и ставим вопрос: нельзя ли на этой плоскости показать точку, равноотстоящую от

двух данных (хотя бы приблизительно). Учащиеся показывают такие точки: один из них покажет т. C, другой т. D, третий т. E. Возможно присоединить сюда еще вопрос: как думают учащиеся, отстоит ли т. M на равных или неравных расстояниях от A и B. Учащиеся говорят, что от A она отстоит ближе, чем от B, и показывают эти расстояния MA и MB. После таких упражнений выясняется: 1) что точек, равноотстоящих от A и B, на этой плоскости бесконечно много и 2) что не всякая точка этой плоскости удовлетворяет требованию—„равно отстоять от A и B“. Тогда ставится вопрос: нельзя ли что-нибудь сделать с плоскостью, чтобы получить сразу все точки, равноотстоящие от A и B? Учащиеся обычно довольно скоро (хотя и не сразу) находят ответ: надо перегнуть плоскость так, чтобы т. A совпала



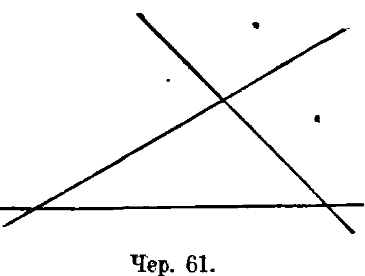
Чер. 59. Чер. 60.

с т. B. Выполнив такое перегибание на нашем листике, мы получаем прямую перегиба, на которой располагаются искомые точки. Если обратить внимание на то, что двумя точками A и B определяется прямая AB и если наш листик перегнуть сначала по прямой AB, а затем по выше найденной линии DCE..., то легко убедиться, что искомые точки должны лежать на перпендикуляре к отрезку AB через его середину. Вводим термин „геометрическое место точек“, равноотстоящих от двух данных, и учимся на доске строить это геометрическое место. На прилагаемом чер. 60 видно, что, вообще говоря, самый отрезок AB строить нет нужды.

В сущности, как видно из предыдущего, во всей этой работе нет места „доказательства“ теорем.

Найденный процесс перегибания показывает обязательность полученного свойства без всяких доказательств. Возможны, однако, если то желательно, ввести обычные доказательства, в форме проверки: возьмем на построенном перпендикуляре какую-либо точку *M* (чер. 60) и рассудим, правда ли она равноудалена от *A* и *B*. Для этого построим еще прямые *MA*, *MB* и *AB* и рассмотрим △ *AMC* и △ *BMC* и т. д. Также точно можно взять точку не на перпендикуляре и выяснить (без перегибания плоскости), что она находится не на равных расстояниях от *A* и *B*.

Далее следует вспомнить построение перпендикуляра из точки вне прямой на эту прямую, выяснить, если это не было сделано раньше, что можно построить лишь один перпендикуляр, построить еще несколько наклонных и исследовать их свойства, после чего явится возможным установить понятие о расстоянии между прямою и точкою. Необходимо освоить учащихся с ясным представлением этого перпендикуляра, для чего служат, помимо построений, следующие упражнения (чер. 61): 1) даны 2 пересекающихся прямых и где-либо точка, нарисовать от руки ее расстояние от этих прямых; 2) даны 3 пересекающихся прямых и где-либо точка, нарисовать от руки ее расстояние от этих прямых; 3) при данных таких же, как в 1-м и во 2-м упражнениях, показать лишь, как идут нужные перпендикуляры.



Чер. 61.

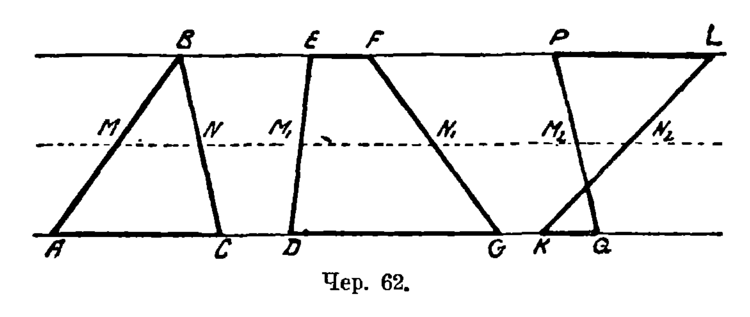
После этого можно перейти к исследованию вопросов, пригодящих к геометрическим местам точек: 1) много ли можно найти точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой? Где эти точки располагаются (каково их геометрическое место)? 2) Много ли можно найти точек, равноотстоящих от двух данных параллельных прямых? Каково их геометрическое место? Первый вопрос решается учащимися непосредственно, так как его решение чрезвычайно легко, а для 2-го и 3-го вопросов придется опять взять на помощь лист бумаги с начерченными на нем прямыми, и учащиеся, обдумав поставленные вопросы, приходятъ

ответу, что для получения искомых точек надо перегнуть плоскость (лист бумаги) так, чтобы одна прямая совпала с другой. Случай пересекающихся прямых приводит к построению биссекторов четырех углов, составляемых этими прямыми. Следует эти биссекторы, в отличие от данных прямых, рисовать цветным мелом. Опять здесь возможна проверка: возьмем какую-либо точку на одном из биссекторов и рассудим, правда ли она равно отстоит от данных прямых; возьмем также точку не на биссекторе и рассудим, правда ли, что она не одинаково отстоит от данных прямых.

Очень хорошо присоединить сюда ряд упражнений вроде следующих: построить точку, находящуюся на расстоянии a от данной точки A и на расстоянии b от данной точки B (отрезки a и b даны); менять данные отрезки a и b так, чтобы их сумма (или их разность) оставалась постоянною и строить соответственные точки — приходим к построению эллипса (или гиперболы) по точкам. Построить точку, находящуюся на равных расстояниях от данной точки и прямой; менять это расстояние и строить соответственные точки, — приходим к построению по точкам порабола. В зависимости от времени и состава учащихся, можно развить эти упражнения так, чтобы дать учащимся первое знакомство с коническими сечениями.

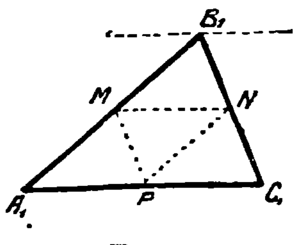
Геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных параллельных прямых, позволяет установить прежде всего положение: всякий перпендикуляр к двум параллельным прямым (расстояние между параллельными прямыми) делится пополам прямою, параллельною данным, и находящеюся на середине расстояния между ними — назовем эту прямую среднею параллельною, — после чего возникает вопрос: не делится ли пополам этою среднею параллельною всякий отрезок, заключенный между данными параллельными (чер. 62)? После решения этого вопроса мы можем смотреть на среднюю параллельную, как на геометрическое место середин всевозможных отрезков, заключенных между данными параллельными. Отсюда является возможным перейти к изучению средних линий треугольников и четыреугольников. Построив между двумя данными параллельными отрезки AB и BC, получим $\triangle ABC$, середины двух сторон

которого, точки M и N, лежат на средней параллельной. Построив отдельно какой-нибудь треугольник $A_1B_1C_1$ (чер. 63), мы всегда можем через точку B_1, например, построить прямую параллельную A_1C_1, и, следовательно, установить, что всегда середины двух сторон треугольника лежат на прямой, параллельной третьей стороне. Установив возможность построения для треугольника 3 средних линий (этим именем называем отрезки MN, NP и PM), мы легко получаем, что каждая из них равна половине параллельной ей стороны треугольника. Построив между данными параллельными отрезки DE и FG, приходим к трапеции $DEFG$ и к



Чер. 62.

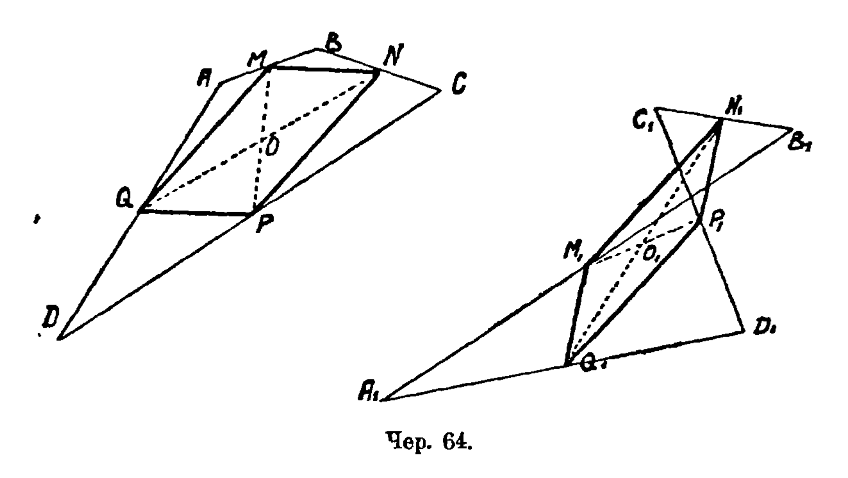
изучению свойств ее средней линии. Трапеция может принять форму $KLPQ$. Эти два вида трапеции можно отличать друг от друга названиями: трапеция, имеющая площадь ($DEFG$), и трапеция, не имеющая площади ($KLPQ$), так как первая выделяет из плоскости одну определенную часть, а вторая выделяет 2 куска, относительно которых надо сделать какие-то условия, чтобы при помощи этих кусков определить площадь трапеции. Для обеих форм трапеции имеем общее свойство: средняя линия трапеции, соединяющая середины параллельных сторон, параллельна параллельным сторонам. Далее, однако, видим разницу: $M_1N_1 = \frac{DG+FE}{2}$ (выясняется это при помощи отрезка DF, середина которого так-



Чер. 63.

же должна лежать на средней параллельной), но $M_2N_2 = \frac{PL - KQ}{2}$ (выясняется это при помощи отрезка KP, середина которого должна также лежать на средней параллельной).

Если построим какой-либо четыреугольник $ABCD$ или $A_1B_1C_1D_1$ (чер. 64), то для него можно построить 6 средних линий (MN, NP, PQ, QM, MP и NQ или M_1N_1, N_1P_1, P_1Q_1, Q_1M_1, M_1P_1 и N_1Q_1), 4 из которых соединяют середины соседних сторон треугольника и образуют параллелограмм, а две остальные (MP и NQ или M_1P_1 и N_1Q_1), соединяющие середины противоположных сторон четыреугольника, делят друг друга пополам (являясь диагоналями параллелограмма). Если построить диагонали 4-угольника AC и BD (или A_1C_1 и B_1D_1), то легко увидим, что периметр параллело-



Чер. 64.

грамма $MNPQ$ (или $M_1N_1P_1Q_1$) равен сумме диагоналей данного 4-угольника.

Мы помещаем все эти указания о средних линиях четыреугольников здесь, но, быть может, на практике их удобнее отнести к более позднему моменту, когда будет пройдена статья о многоугольниках.

К статье о средних линиях присоединяется еще задача о делении отрезка на сколько угодно равных частей.

15. Многоугольники и многосторонники.

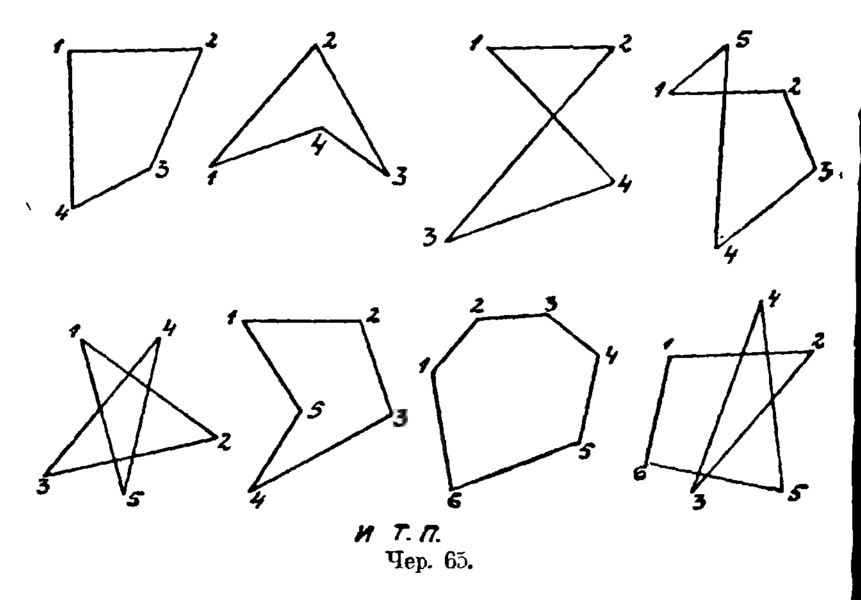
Необходимо, думается, придать этой статье более глубокое, чем это обычно делается, содержание и воспользоваться ею, как хорошим и легким примером для ознакомления учащихся с работою обобщающего мышления.

Для этой цели надо начать с того, что учащиеся должны вспомнить двоякое построение треугольника: 1) можно построить сначала 3 точки, не лежащие на одной прямой, и ими определятся само-собою 3 прямые (можно начать с вершин, определятся стороны); 2) можно начать с построения 3 прямых, не проходящих через одну точку и чтобы между ними не было параллельных, и ими определятся само-собою 3 точки (можно начать со сторон, определятся вершины). Эти 2 построения можно охарактеризовать названиями „треугольник“ и „трехсторонник“. Теперь желательно каждое из этих построений обобщить: 1) построим сначала 4 точки так, чтобы никакие 3 не лежали бы на одной прямой,—ими определятся прямые; сколько? После выяснения, что их 6 (см. выше при изучении параллелограмма), можно их построить и полученную фигуру назвать полным 4-угольником; 2) построим сначала 4 прямых так, чтобы никакие 3 не проходили бы через одну точку и чтобы среди них не было параллельных, тогда ими определятся их точки пересечения; сколько? После выяснения их числа, можно их отметить и назвать полученную фигуру полным 4-сторонником. Необходимо установить возможность произвести расчет, сколько сторон у полного 4-угольника или сколько вершин у полного 4-сторонника. Например: построено 4 точки, каждую из них можно соединить прямою с любою из трех остальных, т.-е. из каждой вершины должны итти 3 прямых; так как всего вершин 4, то из всех вершин должны итти $3 . 4 = 12$ прямых, но здесь каждая прямая считается 2 раза (один раз, например, идущею от точки A к точке B, а другой раз — от точки B к точке A). Поэтому всего прямых будет в 2 раза меньше, т.-е. $\frac{3 . 4}{2} = 6$.

Далее берем 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой, рассчитываем, что ими определяется $\frac{4 \cdot 5}{2}=10$ прямых, и получаем полный 5-угольник с 5 вершинами и 10 сторонами. Так же получаем полный 5-сторонник, с 5 сторонами и 10 вершинами.

Возможно установить и общее положение, что у полного n-угольника имеется n вершин и $\frac{(n-1)n}{2}$ сторон, а у полного n-сторонника — n сторон и $\frac{(n-1)n}{2}$ вершин.

В виду сложности получаемых фигур возникает желание их упростить, для чего при построении многоугольника возьмем не все определяемые построенными вершинами прямые, а лишь отрезки



Чер. 65.

тех, которые соединяют вершины **по порядку**. Придется при построении вершин их нумеровать, — получим **простые многоугольники** (чер. 65).

Устанавливается, что каждый простой многоугольник можно рассматривать и как простой многосторонник.

Рассматривая их образы (см. выше, а также целый ряд других), придем к возможности разделить их на 2 разряда. Мы видим, что одни многоугольники выделяют из плоскости определенную часть, которая и является площадью многоугольника (1-ый, 2-ой, 6-ой и 7-ой), а другие вырезают из плоскости несколько кусков (например, 8-ой), так что, если не сделать относительно них каких-либо добавочных условий [1]), мы не видим, что нам принять за площадь многоугольника. Возможно, в виду этого, в курсе геометрии средней школы ввести названия „многоугольники, имеющие площадь" и „многоугольники, не имеющие площади", причем к последнему следует прибавить указание, что тот, кто умеет разбираться в кусках плоскости, сумеет и для них определить площадь; сразу же ее не видно (к этому разряду относятся многоугольники 3-ий, 4-ый, 5-ый и 8-ой из числа данных на вышеприведенном чертеже).

Рассматривая многоугольники, имеющие площадь, мы прежде всего обращаем внимание на их внутренние углы, понимая под этим те углы, внутри которых лежит или вся площадь многоугольника или, по крайней мере, ее часть (например, угол при вершине 4-ой в многоугольнике 6-м). Отмечаем эти углы и учимся вычислять их сумму, причем удобно вступить на путь индукции: сумма внутренних углов треугольника $= 2d$; если возьмем 4-угольник, то диагональю он разобьется на 2 треугольника, и сумма внутренних его углов $= 2d \cdot 2 = 4d$; если возьмем 5-угольник и построим диагонали из одной его вершины, получим 3 треугольника, и сумма его внутренних углов $= 2d \cdot 3 = 6d$; 6-угольник даст 4 треугольника, 7-угольник — 5 и т. д. и вообще n-угольник даст $(n-2)$ треугольников и, следовательно, сумма внутренних его углов $= 2d\ (n-2)$.

Мы видим еще, что в некоторых многоугольниках (имеющих площадь) каждый из внутренних углов меньше выпрямленного (на выше данном чертеже многоугольники 1-ый и 7-ой), а в других имеются внутренние углы, большие выпрямленного (2-ой и 6-ой).

---

[1]) Основное из этих условий таково: если какой-либо кусок обходится в одном направлении (например, если он остается по левую руку), то он берется для площади со знаком $+$, а если в противоположном, то — со знаком $-$.

Называем первые многоугольники выпуклыми, а вторые—невыпуклыми.

Присоединяем еще сюда нахождение суммы внешних углов многоугольника в обычном понимании этого термина и в обычном изложении.

16. Подробное изучение кругов.

К тем сведениям о круге, которые уже имеются у учащихся, прибавляется теперь более подробное изучение вопросов о кругах. Основиым вопросом является таковой: мы знаем, что прямая линия определяется двумя точками, —сколькими точками определяется круг? Учащиеся разбирают этот вопрос в таком порядке:

1) Зададим одну точку; сколько можио построить кругов, проходящих через эту точку?

2) Зададим две точки; сколько можно построить кругов, проходящих через эти две точки?

3) Зададим три точки (сначала не на одной прямой, а потом на одной прямой); сколько можно построить кругов, проходящих через эти три точки? 1-ый вопрос приводит к ответу: бесчисленное множество кругов, причем центр можно брать где угодно на плоскости. 2-ой вопрос приводит к ответу: бесчисленное множество, причем центр можно брать только на перпендикуляре к отрезку, соединяющему эти точки, через его середину. 3-ий вопрос приводит к заключению: круг вполне определяется тремя точками, через которые он обязан проходить, т.-е., если три точки не лежат на одной прямой, то через них можно построить лишь один круг, а если эти три точки расположены на одной прямой, то через них нельзя построить ни одного круга. При рассмотрении последнего вопроса, когда 3 точки не лежат на одной прямой само-собою приходим к треугольнику, вписанному в круг, и к его свойству.

Дальнейшая работа учащихся должна происходить над вопросом о том, какие различные случаи возможны для расположения прямой и круга. Желателен двоякий подход к этому вопросу

1) закреплены положение прямой и центра круга, а радиус его меняется. Тогда мы видим, что если радиус круга меньше расстояния центра от прямой, то круг не имеет общих точек с прямою, а если радиус круга больше расстояния его центра от прямой, то круг имеет две общих точки с прямою. Намечается особый случай: что будет, если радиус круга равен расстоянию его центра от прямой? Обычным путем выясняется, что здесь имеется лишь одна общая точка у круга и прямой, а другой быть не может, и является возможность установить понятие о касании круга и прямой. 2) Закреплен круг (его центр и радиус), а прямая перемещается параллельно самой себе. Здесь также выяснится, что, когда расстояние прямой от центра круга равно радиусу, должен иметь место особый случай, а именно — случай касания прямой и круга.

В результате этой работы явится возможным установить признак касания прямой к кругу (если расстояние прямой от центра круга равно его радиусу, то прямая касается круга), а также построение касательной к кругу через точку, лежащую на самом круге.

После этого явится возможным поставить вопрос, аналогичный основному вопросу: сколькими прямыми определяется круг, если он обязан касаться этих прямых?

Учащиеся устанавливают постепенно: 1) если круг должен касаться одной данной прямой, то таких кругов можно построить бесчисленное множество, причем центр можно брать где угодно на плоскости (здесь намечаются еще побочные вопросы, над которыми могли бы учащиеся поработать, и это очень желательно: каково геометрическое место центров кругов, касающихся данной прямой в данной точке? Каково геометрическое место центров кругов, касающихся данной прямой и имеющих данный радиус? 2) Если даны две параллельных прямых, то кругов, касающихся этих прямых, можно построить бесчисленное множество, причем центры их расположены на средней параллельной; устанавливается свойство этих кругов: все они имеют одинаковый радиус, равный половине расстояния между данными параллельными. 3) Если даны 2 пересекающихся прямых, то кругов, касающихся этих прямых, можно построить бесконечно много, причем

их центры лежат на биссекторах углов, образуемых этими прямыми. 4) Если даны три прямые, из которых две параллельных и третья их секущая, то можно построить 2 круга, касающихся всех трех прямых, причем выясняется особенность этой фигуры: биссекторы двух внутренних односторонних углов пересекаются на средней параллельной. 5) Если даны три прямых, пересекающихся в трех точках, то можно построить 4 круга, касающихся всех трех прямых, причем выясняются свойства треуг-ка: 6 прямых, делящих пополам и внутренние и внешние углы треуг-ка, пересекаются по 3 в 4 точках, а именно — в центре вписанного в △ круга и в центрах вне-вписанных кругов; биссекторы внутренних углов треуг-ка пересекаются в одной точке, в центре вписанного круга.

Здесь придется остановиться на понимании термина „определяется", а именно — можно говорить, что круг определяется данными требованиями тогда, когда им удовлетворяет конечное число кругов. Поэтому те требования, которые имеются в задачах 3-ей и 4-ой, определяют круг, т.-е. круг (2 или 4 круга) определяется требованием, чтобы он касался трех данных прямых.

Сюда желательно присоединить еще ряд задач на построение само собою возникающих во время работы над предыдущими вопросами: 1) выяснилось, что кругов, касающихся данной прямой в данной точке, можно построить бесконечно много, причем центры их лежат на перпендикуляре к данной прямой через данную точку; не определится ли круг, если к этому требованию присоединить еще одно из разобранных ранее, а именно требование, чтобы круг проходил через другую данную точку? 2) Выяснилось, что требование касаться двух параллельных прямых не определяет положения круга; не определится ли оно, если присоединить сюда еще требование, чтобы круг проходил через точку, данную между параллельными? 3) Выяснилось, что требование касаться двух пересекающихся прямых не определяет положения круга; не определится ли оно, если присоединить сюда еще требование, чтобы круг касался одной из данных прямых в данной точке (если учащиеся придут к мысли взять точку не на одной из данных прямых и потребовать, чтобы круг проходил через взятую точку, то придется указать учащимся, что такая задача

может быть решена, но что пока у учащихся недостаточно для этого знаний) или чтобы круг имел данный радиус и т. п.

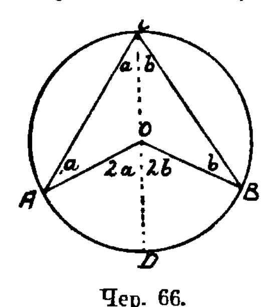
Далее следует перейти к рассмотрению менее крупных вопросов: 1) изменение хорды, в зависимости от ее расстояния от центра; 2) к нахождению оси симметрии фигуры, состоящей из круга и из одной прямой; 3) к решению вопроса, когда у фигуры, состоящей из круга и двух прямых, имеется ось симметрии. Первый из этих вопросов позволит установить, что в круге две хорды равны, если они равно удалены от центра или обратно: равные хорды равноудалены от центра. Второй вопрос приводит к установлению свойства, что диаметр, перпендикулярный к хорде, делит ее пополам. Третий вопрос желательно обработать в такой форме: если построим круг и 2 прямых произвольно, то, вообще говоря, эта фигура не имеет оси симметрии, — возникает вопрос, как надо построить две прямые (или 2 хорды в этом круге), чтобы фигура имела ось симметрии. На этот вопрос изыскиваются ответы: надо или чтобы прямые (хорды) были параллельны или чтобы эти прямые (хорды) были равноудалены от центра.

Затем переходим к изучению фигуры, состоящей из двух кругов. Теперь уже ясно, что 2 круга не могут иметь более двух общих точек (через 3 точки можно построить лишь один круг или даже ни одного). Построив два круга на далеком расстоянии друг от друга и затем постепенно придвигая один к другому, мы с легкостью у в и д и м, какое значение имеют для расположения двух кругов сумма и разность их радиусов и установим соотношения для каждого случая расположения между суммою или разностью их радиусов и расстоянием между их центрами. Здесь, конечно, надо обратить особое внимание на изучение касания кругов и необходимо добиться от учащихся ясных представлений, являющихся ответами на вопросы: много ли можно построить кругов, касающихся данного круга в данной точке? Каково геометрическое место их центров? Каково геометрическое место центров кругов, имеющих данный радиус и касающихся данного круга (внешним или внутренним образом)? Здесь появятся также некоторые конструктивные задачи. Напр.: построить круг, имеющий данный радиус и касающийся данного круга и данной прямой (или двух данных кругов); построить круг, касающийся данного

круга в данной точке и проходящей через другую данную точку (следует рассмотреть различные возможные здесь положения точки относительно данного круга). Могут быть введены и более сложные задачи. Напр.: построить круг, касающийся данного круга в данной точке и касающийся данной прямой; построить круг, касающийся данного круга и данной прямой в данной точке; построить круг, касающийся двух данных концентрических кругов и проходящий через точку, данную между ними. Конечно, развитие работы по рассмотрению этих задач зависит и от состава учащихся и от времени.

Уже симметрия круга относительно центра давно позволила учащимся видеть соотношения между центральными углами и высекаемыми ими дугами (если дуги равны, то и центр. углы равны и т. п.). Теперь введем в курс вписанный в круг угол.

Здесь педагогическое достижение должно быть направлено на то, чтобы учащиеся ясно видели (конечно, опираясь на предыдущие сведения), что центральный угол в 2 раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу. Надо стремиться, чтобы в сознании учащихся как бы запечатлелась картина, изображенная на чер. 66. Видоизменения расположения центрального и вписанного углов должны быть рассмотрены, но это уже не столь существенно. Главное — добиться запечатления здесь приводимого чертежа.

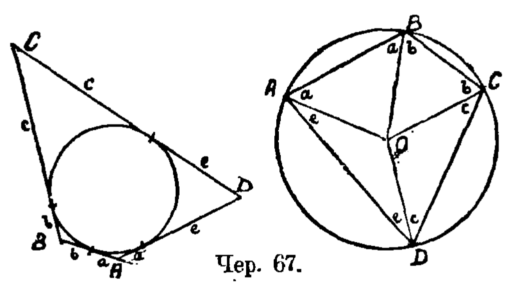


Чер. 66.

Сюда присоединяется целый ряд существенных вопросов, обычно вводимых в курс в форме теорем. Если окажется, что центральный угол *AOB* выпрямленный, то вписанный угол будет прямым, а отсюда возникает возможность решить вопрос: много ли можно построить прямоугольных треугольников на данном отрезкѣ, как на гипотенузе? Где расположены вершины этих треугольников? Отсюда переход к построению касательных к кругу из внешней точки. Когда выяснится, что из внешней точки к кругу можно построить 2 касательных, причем их отрезки от этой точки до точек касания равны, то явится возможным разобрать свой-

ство сторон описанного около круга четыреугольника. Здесь возникнет вопрос: нет ли какого-либо аналогичного свойства у вписанного четыреугольника? Интересны следующие сопоставления (чер. 67).

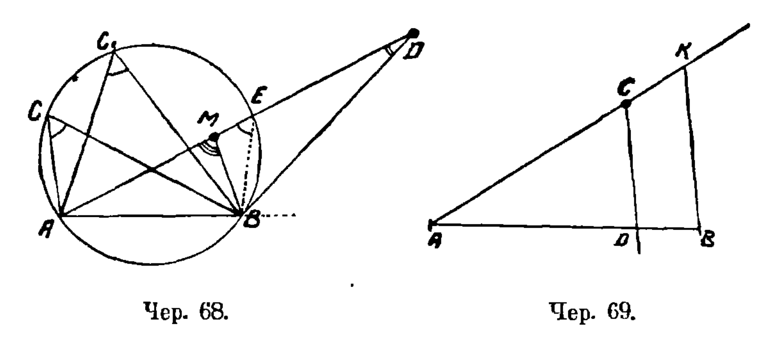
Каждая сторона описанного четыреуг-ка разбивается точкою касания на 2 отрезка ($AB = a + b$ и т. д.), причем отрезки попарно равны (на первом чертеже равные отрезки обозначены одинаковыми буквами a и a, b и b и т. д.). Каждый угол впи-



Чер. 67.

санного четыреугольника разбивается радиусом, проведенным к его вершине, на 2 части ($\angle A = e + a$; $\angle B = a + b$ и т. д.), причем эти части (эти углы) попарно равны (на втором чертеже равные углы обозначены одинаковыми буквами a и a, b и b и т. д.), причем это равенство ясно всякому, кто видит равнобедр. треуг-ки AOB, BOC и т. д. и знает их свойства. Если на первом чертеже 8 отрезков a, a, b, b, c, c, e и e можно распределить на 2 группы так: $AB + CD = a + b + c + e$ и $BC + AD = a + b + c + e$, то на втором чертеже 8 углов a, a, b, b, c, c, e и e можно распределить также на 2 группы: $\angle A + \angle C = a + b + c + e$ и $\angle B + \angle D = a + b + c + e$. Отсюда видно: 1) в описанном четыреугольнике сумма одной пары противоположных сторон равна сумме другой и 2) во вписанном четыреугольнике сумма одной пары противоположных углов равна сумме другой. Если присоединить сюда знание, что сумма внутренних углов всякого четыреугольника равна $4d$ (четырем прямым), то сумма двух противоположных углов вписан. четыреуг-ка равна $2d$. Аналогичного добавления для описанного четыреугольника сделать нельзя, ибо сумма всех сторон (периметр) четыреугольника может меняться до бесконечности, и это желательно сделать ясным для учащихся.

Возможность построить множество вписанных углов, высекающих из круга одну и ту же дугу. (или, как обычно говорят, опирающихся на одну и ту же дугу) и возможность видеть их равенство (каждый из них равен половине одного и того же центрального угла) приводит к задаче: построить геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. Этой задаче должен предшествовать следующий разбор (чер. 68): из всякой точки дуги AC_1B (напр., из C, из C_1 и т. д.) хорда AB видна под равными углами, а из любой точки вне круга (но по ту же сторону прямой AB), напр., из точки D, под меньшим углом (видно из $\triangle EDB$: $\angle AEB$ внешний, а $\angle D$ внутренний), а из точки M внутри круга — под большим углом (видно



Чер. 68. Чер. 69.

из $\triangle MEB$: $\angle AMB$ внешний, а $\angle AEB$ внутренний). Когда таким образом выяснится, что искомое геометрическое место точек, из которых данный отрезок должен быть виден под данным углом, есть дуга некоторого круга, проходящего через концы отрезка (точнее: дуги двух кругов, причем одна дуга лежит по одну сторону прямой AB, а другая по другую сторону), можно приступить и к самому построению. Учащимся ближе и понятнее такое построение (чер. 69): пусть AB — данный отрезок и $\angle m$ — данный угол. Построим через A любой луч и на нем возьмем любую точку C. Построим при $C \angle ACD = \angle m$. Тогда из точки C виден под углом m не данный отрезок AB, но лишь его часть, а именно отрезок AD. Найдем теперь на луче AC такую точку, чтобы из нее был виден под данным углом весь отрезок AB, для чего надо через т B построить $BK \parallel DC$. Тогда из точки K

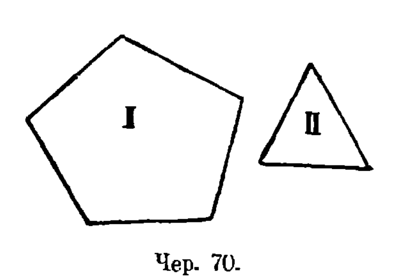
отрезок *AB* будет виден под даныим углом — остается через 3 точки *A*, *K* и *B* построить круг, что умеем выполнять. Можно присоединить сюда несколько задач на построение, решение которых основано на изучаемом геометрическом месте.

Не будем останавливаться на подробностях этой части курса, а лишь заметим, что возможио по ходу дела изменить порядок. Напр., возможио сначала изучать геометрическое место точек, из которых даный отрезок виден над данным углом, отсюда перейти к вписанному в круг четыреугольнику, а затем к построению касательной к кругу из внешней точки и к описанному четыреугольнику.

17. Равенство площадей и равновеликие многоугольники.

Развитие соображений о равенстве площадей представляет собою ценный материал для приучения учащихся к обобщающей работе мысли, а потому оно никоим образом не должно комкаться так, как это обычно имеет место в наших ходовых учебниках.

Прежде всего тот процесс наложения, который неодиократно имел место в предыдущем, позволит учащимся установить, что **две площади следует считать равными, если они при наложении совпадают.** Далее ставим на очередь вопрос о сложении двух площадей (напр., I и II), ограниченных прямыми линиями (чер. 70). В основе сложения лежит, как мы уже знаем, процесс сдвижения, а здесь мы можем две наших площади (I и II) сдвинуть множеством различных способов. Следует, чтобы учащиеся выполнили (при помощи циркуля и линейки), по крайней мере, два различных построения нахождения суммы I и II площадей, которые в результате давали бы 2 площади, не совпадающие между собою при наложении. Учащиеся уже знают переместительный закон сложения для чисел, для отрезков, для углов —

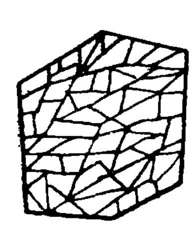


Чер. 70.

теперь становится необходимым обобщить этот переместительный закон и принять, что, как бы мы ни придвинули одну площадь к другой, результаты этих сдвижений должны считаться равными. Обратив хотя некоторое внимание на сложенне трех и более площадей (а, следовательно, и на обобщение свойства сложения что при сложении многих слагаемых их можно складывать любыми группами и в любом порядке, — а это свойство является следствием переместительного и сочетательного законов), мы приходим к установлению второго признака равенства площадей: две площади (ограниченные прямыми) должны считаться равными, если каждая из них является суммою площадей, попарно совпадающих при наложении (здесь, в сущности, имеется еще одно обстоятельство: каждая площадь должна считаться суммою конечного числа слагаемых).

Переходим к вычитанию площадей. Опять видим (применяясь, напр., к I и II площадям), что это вычитание можно выполнить разнообразными способами, что влечет за собою новый признак равенства площадей: две площади должны считаться равными, если каждая из них есть разность площадей, совпадающих при наложении.

Как известно, наука устанавливает 3 разных термина для этих трех случаев равенства площадей: 1) равенство по наложению — конгруэнтные площади, 2) равенство по сложению — равносоставленные площади и 3) равенство по вычитанию — равновеликие площади. Здесь возникают тонкие вопросы, и, быть может, должно об них побеседовать с учащимися: 1) не могут ли две равносоставленных площади быть не равными по наложению, т.-е. пусть некоторая площадь разбита на много (но не на бесконечно большое число) слагаемых (чер. 71), — нельзя ли эти слагаемые площади переложить так, чтобы из них получилась новая площадь, явно не совмещающаяся с начальной, напр., чтобы вся новая площадь умещалась внутри начальной или, наоборот, чтобы новая площадь закрывала всю начальную, да еще захватывала бы какой-либо кусок плоскости, лежащий



Чер. 71.

вне начальной? 2) Обязательно ли две равновеликих площади в то же время и равносоставлены? Другими словами: две площади, равные по вычитанию, должны ли быть равными и по сложению? Смысл этих вопросов сводится, конечно, к общему вопросу: не может ли оказаться противоречий при применении трех вышеустановленных признаков равенства площадей? Эти вопросы послужили предметом научных изысканий (принцип Де-Цольта, теория площадей Гильберта), но знакомить учащихся с этими изысканиями не представляется возможным, и приходится ограничиваться лишь тем, что эти вопросы не должны замалчиваться перед учащимися. Последние, на основе своих непосредственных представлений, приходят к установлению отсутствия противоречий в трех вышеуказанных признаках равенства площадей и, следовательно, к заключению:

Две площади равны: 1) если они совпадают при наложении и 2) если каждая из них является суммою или разностью площадей, совпадающих попарно при наложении.

Установление признака для применения к площадям понятий „больше“ или „меньше“ не представляет трудности.

Основные проекты учения о равновеликости многоугольников (два многоугольника называются равновеликими, если равны их площади) таковы: 1) равновеликость двух параллелограммов с равными основаниями и высотами (следует указать на возможность видеть, что площади таких параллелограмов равны и по вычитанию и по сложению); 2) равновеликость треугольников, имеющих равные основания и равные высоты; 3) превращение треугольника в равновеликий прямоугольник, четыреугольника — в треугольник, пятиугольника (и т. д.) — также в треугольник; 4) теорема Пифагора.

Лучшим способом выяснения теоремы Пифагора считаю, согласно своей практике, следующий.

Предлагаем учащимся выполнить следующее (сложное) построение. Строим (чер. 72):

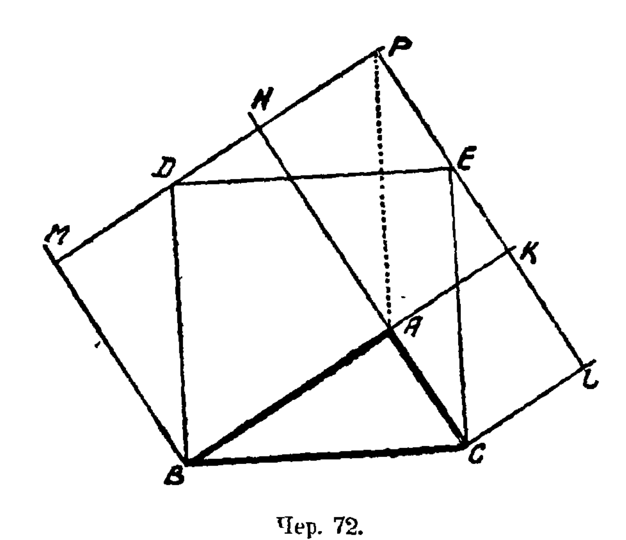
1) прямоугольный треугольник BAC ($\angle A = d$).

2) Квадрат $BDEC$ на гипотенузе BC ($BD \perp BC$, $CE \perp BC$, $BD = EC = BC$).

3) AK — продолжение BA, $CL \parallel AK$ и прямую EL (через точку E) $\parallel AC$ — получится квадрат $CAKL$ на катете AC (для

выяснения этого придется рассмотреть $\triangle ECL$ и $\triangle BAC$; у них $BC = EC$ и $\angle BCA = \angle ECL$; так как эти треугольники прямоугольные, то этого достаточно, чтобы быть убежденным в их равенстве, т.-е. $\triangle ECL = \triangle BAC$).

4) AN — продолжение CA, $BM \parallel AN$ и прямую MDN (через точку D) $\parallel BA$ — получится квадрат $BMNA$ на катете BA (выясняется это при помощи равенства треугольников BMD и BAC).



Чер. 72.

5) NP — продолжение MN и KP — продолжение LK; наконец, — прямую PA.

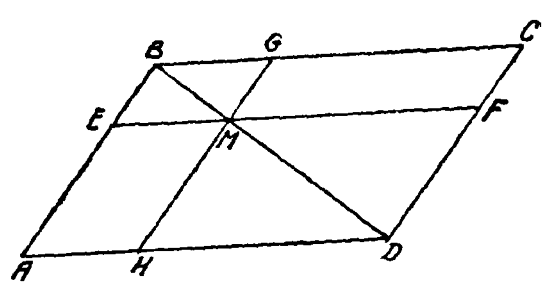
Тогда получим еще 3 треугольника, равных начальному, а именно: $\triangle DPE$, $\triangle ANP$ и $\triangle PKA$.

Итак, имеем: $\triangle ABC = \triangle CEL = \triangle BDM = \triangle DPE = \triangle ANP = \triangle PKA$.

Мы видим, что придется от всей застроенной площади $BMPLCB$ отрезать 3 куска, а именно: площади треугольников BMD, DPE и CEL, чтобы получить площадь квадрата $BDEC$. Но у нас имеется 6 равных треугольников; если от застроенной площади $BMPLCB$ отрезать площади остальных трех треугольников (т.-е. $\triangle BAC$, $\triangle ANP$ и $\triangle PKA$), то получим площади двух квадра-

тов $ABMN$ и $AKLC$, откуда и приходим к выводу, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Очень хорошо ввести в дело и знаменитое евклидовское построение (чер. 73), дающее возможность получить 2 равновеликих параллелограмма, имеющих и разные стороны и разные высоты,



Чер. 73.

но равные углы. Это построение таково. Строим: 1) параллелограмм $ABCD$, 2) его диагональ BD, 3) через любую точку M его диагонали BD две прямые: $EF \parallel BC$ и $GH \parallel BA$.

Тогда легко видеть:

1) площадь $AEMH$ = площади $MGCF$ и
2) „ $ABGH$ = „ $EBCF$.

Это построение можно применить к решению ряда вопросов и задач (см. приложение), а с учащимися его следует использовать для превращения данного прямоугольника в другой, равновеликий ему и имеющий данное основание. Это важно потому, что таким образом видно, что для решения этой задачи не надо ни умения измерять площади, ни знания пропорциональности отрезков (при обычном решении этой задачи всем этим пользуются).

18. Измерение отрезков, углов, площадей; отношение двух отрезков.

Выделяя в особую часть учение об измерении геометрических объектов, „измерительную геометрию", я вовсе не хочу этим сказать, что в предыдущем учащихся должно было отво-

дить от всяких измерений в области геометрии. Нет, если на протяжении предыдущего курса появятся моменты, когда целесообразно ввести в дело измерение (напр., в вопросе об относительном расположении двух кругов), то всегда преподавателю явится возможность предложить учащимся соответствующие упражнения. Однако, там на это измерение учащиеся могли смотреть лишь с той точки зрения, какая имеет место в житейской практике: уложить несколько раз какую-либо единицу меры (напр., сажень), приложить к измеряемому объекту, напр., фут, разделенный на дюймы и линии, или транспортир. разделенный на градусы, и отсюда получить соответствующее число для измеряемого объекта. Но должен наступить момент, когда процесс измерения явится возможным выяснить с теоретической точки зрения и воспользоваться им для убеждения учащихся в необходимости вдумчивого отношения к тому, что на практике мы выполняем как бы машинально. Такой момент наступает, согласно моим наблюдениям, в 5-м или 6-м классах средней школы. И вот, настоящая глава имеет целью уяснить до возможной отчетливости „процесс измерения“.

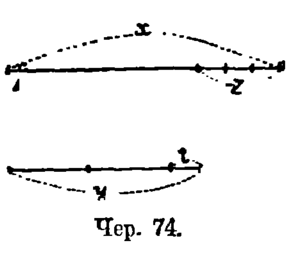
Учащиеся вспоминают, что они измеряли в свое время длину комнаты, высоту дерева и т. п., причем результаты этих измерений записывали в виде:

$$\text{длина комнаты} = 11 \text{ аршин}$$
$$\text{высота дерева} = \frac{3}{4} \text{ сажени и т. п.}$$

В каждой из этих записей входят 2 прямолинейных отрезка (ведь под именем „длина комнаты“ мы представляем себе некоторый отрезок, так же точно под именем „аршин“ и т. п.) и число. Под влиянием этих воспоминаний мы приходим к общей мысли: если под именем a и b понимаем 2 прямолинейных отрезка и если о них записано, что $a = kb$, где k означает какое-либо число, то мы можем смотреть на эту запись, как на результат измерения отрезка a отрезком b (или: принимая за единицу отрезок b).

Сначала полезно поработать с учащимися над уравнениями того вида, который имеется выше, т.-е. над уравнениями вроде $y = 7x$ или $y = 3\frac{3}{8}x$ и т. п.

Учащиеся должны ясно представлять себе: 1) что каждое из этих уравнений имеет бесчисленное множество решений в числах, причем эти решения можно получить, давая x — у произвольное значение и **вычисляя** соответствующее значение для y — а; 2) каждое из этих уравнений имеет бесчисленное множество решений в отрезках, причем для получения этих отрезков надо принять определенный отрезок для x и затем **построить** соответствующий отрезок для y. Далее возникает обратная задача: даны 2 отрезка x и y (чер. 74); составить для них уравнение рассматриваемого вида, т.-е. вида $x = ky$ (или $y = k'x$), где k (или k') число. Эту задачу, в согласии с предыдущим, и должно формулировать: „измерить отрезок x отрезком y“ (или наоборот: измерить отрезок y отрезком x). Таким образом на вопрос, что значит измерить отрезок a, принимая за линейную единицу отрезок b (или короче: „отрезком b“)? Следует отвечать: „это значит—составить для этих отрезков уравнение вида $a = kb$, где k какое-либо число“.



Чер. 74.

Итак, пусть требуется измерить отрезок x отрезком y (см. выше данный чертеж). Решение само собою намечается в такой форме: попытаем, не уложится ли отрезок y на отрезке x несколько раз без остатка; если бы это случилось, то сразу получили бы уравнение желаемого вида $x = ky$. Применяясь к чертежу, видим, что эта попытка не удается; тогда намечается возможность новой попытки: не уложится ли остаток z на отрезке y без остатка — тогда тоже явится возможность составить желаемое уравнение. Продолжаем эти попытки дальше... мы видим, что задача будет решена лишь тогда, когда окажется, что какой-нибудь остаток уложится на предыдущем без остатка. Поэтому делаем допущение: положим (это допущение сделано применительно к нашему чертежу), что отрезок t укладывается на отрезке z ровно 3 раза, т.-е. имеем:

$$x = y + z$$
$$y = 2z + t$$
Пусть $z = 3t$

Отсюда обычным путем получаем:

$$y=7t;\ x=10t \text{ и } x=\frac{10}{7}y=1\frac{3}{7}y.$$

Итак, задача решена — искомое уравнение составлено. Теперь видно (и это надо сделать именно теперь, а не раньше, как то обычно делают учебники геометрии), что в решении вопроса сыграл важную роль отрезок t. Учащиеся видят: 1) отрезок t укладывается, согласно предположению, по целому числу раз и на x и на y — отсюда является возможность установить общее понятие об общей мере двух отрезков; 2) решить задачу удалось только благодаря предположению, что процесс отложения нового остатка на предыдущем заканчивается (и тем самым получается общая мера данных отрезков) — отсюда является возможность установить понятие о соизмеримых и несоизмеримых отрезках.

Учащиеся, после упражнений, приобретают навык в измерении одного отрезка другим, в предположении их соизмеримости, т.-е. в составлении уравнений вида $y=kx$, где y и x — отрезки, а k — целое или дробное число.

На протяжении этих упражнений следует обратить внимание на то, что уравнение $y=kx$, где и y и x и k числа, может быть представлено в форме $\frac{y}{x}=k$, причем оно тогда читается так: отношение числа y к числу x равно числу k. Полезно расширить эту возможность и условиться так же писать наше уравнение и тогда, когда y и x не числа, а отрезки — этим условием как бы устанавливается определение деления одного отрезка на другой. Учащиеся должны понять, что и уравнение $y=kx$ и уравнение $\frac{y}{x}=k$ выражают одну и ту же зависимость между отрезками и разнятся друг от друга не по существу, а по форме. Учащиеся в упражнениях для каждой данной пары отрезков (предполагающихся соизмеримыми) получают обе формы искомой зависимости и легко осваиваются с мыслью, что из одной формы этого уравнения непосредственно вытекает другая.

Далее берем 2 отрезка (a и b — чер. 75) и делаем предположение, что они несоизмеримы.

Тогда, применяясь к нашему чертежу, получим при помощи того же процесса отложения:

$a = 3b + c$
$b = 2c + d$
$3d < c < 4d$

или: c = приблизительно $3d$ или $4d$.

Чер. 75.

Последние 2 строчки имеют такое происхождение: так как a и b несоизмеримы, то никогда мы не можем дойти до конца; поэтому остановимся где-нибудь и составим наше уравнение лишь приближенно верное (как мы это и делаем постоянно в практических измерениях). Из последнего отложения (d на c) мы, в сущности, видим, что $c > 3d$ и что $c < 4d$ (или: $3d < c < 4d$), но приблизительно мы можем принять, что $c = 3d$ (отбрасывая остаток) или что $c = 4d$ (считая этот остаток за целый отрезок d).

Теперь переходим к вычислениям, которые раздваиваются.

1) Пусть $c = 3d$ (прибл.)
тогда $b = 7d$ „
$a = 24d$ „
и $a = \frac{24}{7} b$ „ $= 3\frac{3}{7} b$ (прибл.)
или $\frac{a}{b} = 3\frac{3}{7}$ „

2) Пусть $c = 4d$ (прибл.)
тогда $b = 9d$ „
$a = 31d$ „
и $a = \frac{31}{9} b$ „ $= 3\frac{4}{9} b$ (прибл.)
или $\frac{a}{b} = 3\frac{4}{9}$ „

Так как по настоящему c заключается между $3c$ и $4c$, то и истинный результат измерения должен заключаться между полученными числами $3\frac{3}{7}$ и $3\frac{4}{9}$. Надо выяснить, какое из них больше: $3\frac{3}{7} = 3\frac{27}{63}$, а $3\frac{4}{9} = 3\frac{28}{68}$ — т.-е. $3\frac{3}{7} < 3\frac{4}{9}$ (если бы мы продол-

жили еще один раз процесс наложения, то оказалось бы наоборот: число, полученное в 1-м абзаце вычислений, больше числа, полученного во 2-м. Учащимся, не знающим непрерывных дробей, это кажется странным, и их надлежит освоить с этим фактом, не задаваясь целью достаточно ясно осветить его происхождение).

Тогда мы имеем право записать:

$$1)\ 3\frac{3}{7}b < a < 3\frac{4}{9}b \text{ и}$$

$$2)\ 3\frac{3}{7} < \frac{a}{b} < 3\frac{4}{9}.$$

Вероятно, к этому времени учащиеся уже встречались с подобными записями в курсе алгебры при изучении корней (напр., $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$) и знают, что если написано

$$m < \sqrt[r]{a} < n,$$

то эту запись можно понимать в смысле: $\sqrt[r]{a}$ вычислен с точностью до $(n - m)$, т.-е., если принять $\sqrt[r]{a} = m$ или $\sqrt[r]{a} = n$, то в обоих случаях ошибка окажется меньше числа $n - m$.

Так точно и здесь. Получив выше данные записи, мы можем установить:

1) Отрезок a измерен отрезком b с точностью до $\frac{1}{63}b$ (ибо $3\frac{4}{9}b - 3\frac{3}{7}b = \frac{1}{63}b$), т.-е., приняв $a = 3\frac{3}{7}b$ или $a = 3\frac{4}{9}b$, мы в обоих случаях делаем ошибку, меньшую $\frac{1}{63}b$.

2) Отношение a к b найдено с точностью до $\frac{1}{63}$.

Отсюда получаем и общий результат: если отрезки a и b несоизмеримы, то их отношение не может быть выражено безошибочно ни целым числом, ни дробным, но зато может быть выражено приближенно с определенною точностью. Придется лишь указать учащимся, что если бы они ознакомились с „непрерывными дробями“, то могли бы находить это отношение с какою угодно заданною степенью точности. Получается положение, аналогичное тому, какое имело место в курсе алгебры при рассмотрении корней вроде $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt{10}$ и т. п. Имеется, следова-

тельно, и здесь возможность установить необходимость введения понятия о новом числе — иррациональном. Итак, мы должны считать, что истинное отношение отрезка a к отрезку b есть какое-то иррациональное число — назовем его через k'. Тогда

$$\frac{a}{b} = k' \text{ и } a = k' . b.$$

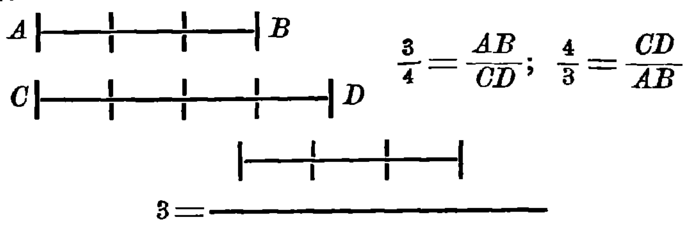
Это иррациональное число k' мы можем вычислять с любою степенью точности.

Если даны два отрезка x и y, то при помощи их определяется число k (или целое или дробное или иррациональное), удовлетворяющее уравнению

$$x = ky \text{ или } \frac{x}{y} = k.$$

Это число может быть обозначаемо особым знаком (у нас буквою k) или при помощи самих отрезков, а именно символом $\frac{x}{y}$.

Чтобы приучить к этим символам, возможен ряд упражнений вроде:



(число 3 есть отношение двух отрезков, которые непосредственно нарисованы, а не названы буквами) и т. д.

Цель этих упражнений состоит в том, чтобы добиться от учащихся, чтобы они, видя символ $\frac{MN}{PQ}$ (где MN и PQ обозначают отрезки), видели здесь обозначение некоторого, рационального или иррационального, числа.

Все вышеизложенное проведено здесь достаточно подробно потому, что здесь имеется много отличий от обычного изложения. Между тем, казалось бы, что вышеизложенное как раз является естественным развитием возникшего вопроса.

Когда учащиеся привыкнут к измерению одного отрезка другим (или к нахождению их отношения), будут ли считаться данные отрезки соизмеримыми или несоизмеримыми, то явится возможность по поводу одного из таких упражнений (напр., см. прилагаемый чертеж и относящуюся к нему запись) поставить вопрос: итак, нам удалось найти способ измерения одного отрезка другим — какие геометрические знания и какие умения нам для этого необходимы?

A L B

C K M D

$$CD = AB + KD$$
$$AB = 2KD + LB$$
$$KD = LB + MD$$
$$MD < LB < 2MD$$

или $LB =$ (прибл.) MD или $2MD$.

1) Пусть $KB = MD$
Тогда $KD = 2MD$
$AB = 5MD$
$CD = 7MD$

и $AB = \frac{5}{7} CD$ (прибл.)

или $\frac{AB}{CD} = \frac{5}{7}$ (прибл.)

2) Пусть $LB = 2MD$
Тогда $KD = 3MD$
$AB = 8MD$
$CD = 11MD$

и $AB = \frac{8}{11} CD$ (прибл.)

или $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{11}$ (прибл.)

1) $\frac{5}{7} CD < AB < \frac{8}{11} CD$

2) $\frac{5}{7} < \frac{AB}{CD} < \frac{8}{11}$.

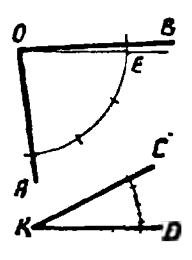
Всматриваясь во все то, что пришлось здесь делать, можно подметить (и учащиеся при помощи учителя это должны сделать), что мы здесь пользовались: 1) умением откладывать меньший отрезок на большем и связанным с ним знанием, позволяющим отличать равные и неравные отрезки, а в последнем случае больший от меньшего; 2) знанием того, что такое — сумма двух отрезков (в первой же записи имеется $AB + KD$). То обстоятельство, что иногда приходится писать $2KD$ (или $3MN$ и т. п.), не вносит ничего нового, ибо $2KD = KD + KD$. Мы видим далее, что иными знаниями или умениями геометрического характера нам здесь не приходится пользоваться, а все дальнейшее сводится

лишь к арифметическим расчетам. Поэтому является возможным поставить и такой вопрос: не знаем ли мы в области геометрии каких-либо иных объектов (кроме отрезков), для которых мы обладаем теми же знаниями и умениями? Если мы такие объекты найдем, то мы можем один из них измерять другим. И учащиеся находят такие объекты: 1) углы, 2) площади, 3) дуги одного и того же круга (здесь обычно приходится делать известные указания преподавателю).

Следует показать, что действительно мы можем любой данный угол AOB измерить другим каким-либо данным углом CKD (принимая $\angle CKD$ за угловую единицу) (чер. 76).

$$\angle AOB = 3\angle CKD + \angle BOE;$$
$$5\angle BOE < \angle CKD < 6\angle BOE \text{ и т. д.}$$

Затем следует прибавить указания на практически употребляемые угловые единицы (прямой угол, угловой градус, угловая минута и секунда), а также и некоторые упражнения на усвоение этих единиц.



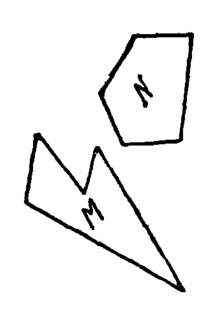
Чер. 76.

Переходим к дугам одного и того же круга. Здесь, быть может, достаточно лишь общих указаний на возможность измерить одну дугу другою (принимая другую за дуговую единицу) и указаний на практически употребляемые дуговые единицы: дуговые градус, минута и секунда.

Наиболее существенным вопросом здесь является установление связи между измерением дуг круга и углов, имеющих определенное отношение к кругу. На этом останавливаться не буду, так как: 1) в предыдущем уже установлена зависимость между центральными и вписанными углами и 2) в самом вопросе об зависимости между измерением дуг и углов нет моментов, требующих каких-либо особых, кроме обычно выставляемых, соображений.

Вопрос об измерении площадей распадается на две части (чер. 77): 1) надо, чтобы учащиеся уяснили себе, что, вообще говоря, всякую площадь (M) можно измерить, принимая другую площадь (N) за единицу площадей (измерить другою площадью N), но что выполне-

ние нужного для этого процесса отложеиия сопряжено с большою подготовительною работою: нужно предварительно и площадь M и площадь N превратить в площади прямоугольников с одинаковыми, напр., основаниями [1]); 2) надо установить зависимость между измерением площади какой либо фигуры и измерениями некоторых отрезков, относящихся к этой фигуре.



Чер. 77.

Что касается прямоугольника, то эта зависимость, выливающаяся в формулу „площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту", должна быть выяснена в естественной последовательности: 1) случай, когда при измерении основания и высоты линейною единицею получаются целые числа; 2) случай, когда это измерение дает в результате дробные числа и 3) случай, когда основание и высота (или что-нибудь одно из них) приводят к иррациональным числам.

Подробное рассмотрение этих случаев дано в моей „Геометрии на плоскости". Здесь замечу, что на практике приходится считаться с двумя обстоятельствами: 1) с отсутствием у учащихся ясного представления о действиях (в частности, об умножении) над иррациональными числами и 2) с недостатком времени. Эти обстоятельства часто заставляют, ограничившись рассмотрением 1-го случая и какого-либо простого примера, относящегося ко 2-му случаю, предложить учащимся поверить, что полученная зависимость распространяется и на всевозможные дробные и иррациональные числа.

Переходим к изучению отношений.

В предыдущем у учащихся должно сложиться представление, что символ $\frac{a}{b}$, где a и b отрезки, выражает какое-нибудь число: рациональное (целое или дробное) или иррациональное. Прежде всего легко установить, что числа, выражаемые подобными сим-

---

[1]) В приложении II дано описание этой работы, носящей повторительный характер.

волами, легко сравнивать с рациональными числами, выраженными обычным способом. Пусть даны отрезки AB и CD (чер. 78); тогда ими определяются числа $\frac{AB}{CD}$ и $\frac{CD}{AB}$. Остановимся на первом, т.-е. на $\frac{AB}{CD}$, и сравним с ним число $\frac{11}{15}$ $\left(\text{вообще — число } \frac{m}{n}\right)$. Для этого разделим отрезок CD на 15 равных частей (вообще — на n равных частей), возьмем таких частей 11 (вообще — m таких частей) и отрезок $= \frac{11}{15}\, CD$ $\left(\text{вообще — отрезок} = \frac{m}{n} CD\right)$ отложим на прямой AB от точки A. Если конец этого отрезка придется в какой-либо точке E, лежащей между A и B, то $AE = \frac{11}{15}\, CD$ $\left(\text{вообще: } AE = \frac{m}{n} CD\right)$ и $AE < AB$, откуда приходим к заключению, что число $\frac{AB}{CD} > \frac{11}{15}$ $\left(\text{вообще: } \frac{AB}{CD} > \frac{m}{n}\right)$

Чер. 78.

Если бы конец отрезка пришелся бы в какой-либо точке E', за точкою B, то 1) $AE' = \frac{11}{15}\, CD$ $\left(\text{вообще: } AE' = \frac{m}{n} CD\right)$ и 2) $AB < AE'$, откуда получили бы, что $\frac{AB}{CD} < \frac{11}{15}$ (вообще: $\left.\frac{AB}{CD} < \frac{m}{n}\right)$. Наконец, если бы конец отлагаемого отрезка пришелся бы в точке B, то $\frac{AB}{CD} = \frac{11}{15}$ $\left(\text{вообще: } \frac{AB}{CD} = \frac{m}{n}\right)$.

Затем выступает задача сравнивать между собою числа, заданные символами $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и т. п., где a, b, c, d. . . отрезки.

Легко решается эта задача для того случая, когда последующие члены отношений одинаковы. Так, если имеем два числа, заданных отношениями $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$, то, в зависимости от того, будет

ли отрезок a больше, меньше или равен отрезку b, и отношение $\frac{a}{c}$ должно считаться больше, меньше или равным отношению $\frac{b}{c}$ $\left[\text{если } a \gtreqless b, \text{ то } \frac{a}{c} \gtreqless \frac{b}{c}\right]$.

Переходя к общему случаю, когда последующие члены отношений не одинаковы, необходимо остановиться вообще на вопросе о равенстве двух чисел.

О двух дробях $\left(\frac{17}{78} \text{ и } \frac{14}{65}\right)$ мы узнаем, равны ли они или нет и какая из них больше другой, в последнем случае — при помощи приведения к общему знаменателю:

$$\frac{17}{78}=\frac{85}{390} \text{ и } \frac{14}{65}=\frac{84}{390}$$

— отсюда заключаем, что 1-ая дробь больше второй.

Но этот способ не применим в настоящий момент курса к числам, заданным символами $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ и т. д., где a, b, c, d . . . . отрезки.

Приходится искать иной признак. Таковой выясняется при обсуждении предыдущего примера. Мы узнали, что дробь $\frac{17}{78} > \frac{14}{65}$. Значит, можно найти еще много чисел, заключающихся между ними, т.-е., больших одной из этих дробей и меньших другой. Раздробив эти дроби в доли, более мелкие, чем 390-ые, получим:

1) $\left.\begin{array}{l}\frac{17}{78}=\frac{85}{390}=\frac{170}{780}\\ \frac{14}{65}=\frac{84}{390}=\frac{168}{780}\end{array}\right\}$ между ними $\frac{169}{780}$.

2) $\left.\begin{array}{l}\frac{17}{78}=\frac{255}{1170}\\ \frac{14}{65}=\frac{252}{1170}\end{array}\right\}$ между ними $\frac{253}{1170}$ и $\frac{254}{1170}$, и т. д.

Следует заметить, что когда предлагаешь подобную работу учащимся, например, для дробей $\frac{5}{8}$ и $\frac{2}{3}$, то учащиеся, приведя их к общему знаменателю и получив (для нашего примера) $\frac{15}{24}$

и $\frac{16}{24}$, склонны по первому впечатлению ответить, что между ними найти дробей нельзя. Необходим некоторый промежуток времени для обдумывания (молчаливого), после которого учащиеся становятся на правильный путь.

Итак, всегда, когда две дроби неравны, можно найти промежуточные для них числа; нельзя этого сделать только тогда, когда данные числа равны. Это свойство и дает нужный нам признак в общей форме:

Если имеем два числа (рацион. или иррац. — безразлично), в какой бы форме они ни были заданы, то эти два числа равны только тогда, когда нельзя найти (рациональных) чисел, больших одного из них и меньших другого.

если же окажется, что можно найти число, большее первого из данных и меньшее второго, то первое данное число меньше второго.

У нас числа задаются теперь отношениями отрезков; поэтому имеем:

два отношения равны, если мы убедимся, что нельзя найти какого-либо рационального числа, большего одного из отношений и меньшего другого; если же такое число можно найти и если, например, оно больше 1-го отношения и меньше 2-го, то 1-ое отношение меньше 2-го.

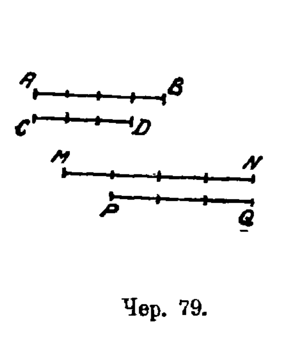
Следующая глава будет рассматривать применение найденного признака, а настоящую закончим указанием, что на практике измеряют один отрезок другим (все равно, соизмеримы ли или нет эти отрезки) при помощи раздела отрезка, принимаемого за линейную единицу, на несколько равных частей и укладывания этой части на измеряемом отрезке точность такого измерения равна той доле линейной единицы, на сколько равных частей она была разделена.

19. Пропорциональность отрезков; подобие.

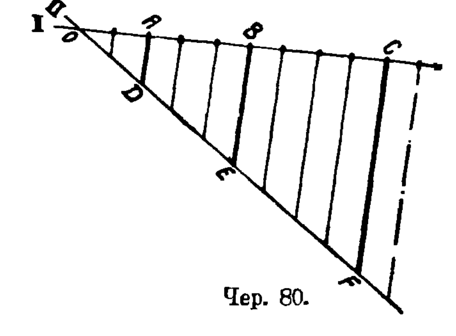
Прежде всего следует указать самый простой пример получения двух пар отрезков, отношения которых равны. Возьмем какое-нибудь рациональное число, например, $\frac{3}{4}$, и построим 2 пары

различных отрезков, отношения которых равны этому числу; тогда получим $\frac{CD}{AB}=\frac{PQ}{MN}$ (чер. 79) равенство двух отношений. Здесь вводятся термины: „пропорция“, „пропорциональные отрезки“, „крайние члены“ и т. д.

Далее переходим к более сложному построению (чер. 80): строим две прямых I и II, пересекающихся в точке O. На I-ой прямой откладываем равные отрезки от точки O их на чертеже отложено 10) и строим через их концы ряд параллельных; тогда на II-ой



Чер. 79.



Чер. 80.

прямой получим также ряд равных отрезков (это знание является побочным результатом при рассмотрении задачи о делении отрезка на сколько-угодно равных частей). Тогда мы можем, выбрав лишь некоторые точки деления, например, A, B и C, получить на I-ой прямой пары соизмеримых отрезков, отношение которых легко выражается числом. Например:

$$\frac{OA}{BC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\ \frac{AB}{OB}=\frac{3}{5};\ \frac{OB}{OC}=\frac{5}{9}\ \text{и т. д.}$$

После построения параллельных на II-ой прямой получим также соизмеримые отрезки, соответствующие отрезкам на I-ой прямой (точке A соотв. точка D, точке B — точка E и т. д.). Для этих отрезков получим:

$$\frac{OD}{EF}=\frac{1}{2};\ \frac{DE}{OE}=\frac{3}{5};\ \frac{OE}{OF}=\frac{5}{9}\ \text{и т. д.}$$

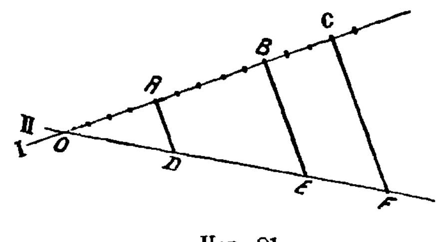
Является возможность написать ряд пропорций, например:

$$\frac{OE}{OF}=\frac{OB}{OC}.$$

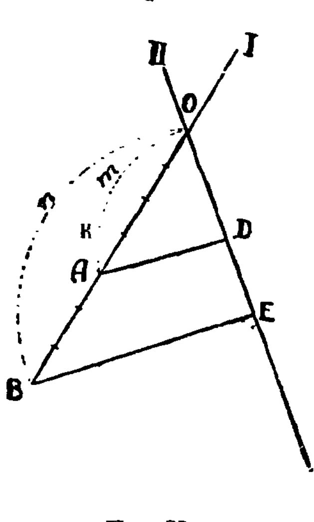
Итак, мы здесь имеем такой способ построения пропорциональных отрезков: на I-ой прямой строим ряд равных отрезков, через их концы строим ряд параллельных, выбираем на I-ой прямой ряд точек, вроде A, B и C, и на II-ой берем соответствующие (т.-е. лежащие на тех же параллельных) точки.

Само собою напрашивается упрощение этого построения: нет нужды строить все параллельные, а достаточно лишь построить параллельные через избранные точки. Приходим к построению, данному на чер. 81, где уже точки A, B и C выбраны несколько иначе. И здесь, не смотря на то, что промежуточные параллельные не построены, мы с уверенностью пишем пропорции:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OE};\ \frac{AB}{OB}=\frac{DE}{OE};\ \frac{AC}{BC}=\frac{DF}{EF} \text{ и т. д.}$$



Чер. 81.



Чер. 82.

Возникает мысль о возможности дальнейшего упрощения, нельзя ли не откладывать на I-ой прямой равные отрезки, а сразу взять где-либо точки A, B и C и через них построить параллельные? Необходимо, конечно, этот вопрос расследовать. Ограничимся лишь двумя точками (чер. 82). На I-ой прямой строим где угодно точки A и B и затем строим: $AD \parallel BE$ — получаем на II-ой прямой соотв. точки D и E. Здесь мы имеем на I-ой прямой 3 отрезка OA, AB и OB и соотв. им отрезки на II-ой прямой. Выберем какую-либо пару отрезков на I-ой прямой, например, OA и OB. Мы можем написать символ $\frac{OA}{OB}$ и знаем, что

он выражает число, но не знаем какое,— быть может, арциональ-ное, быть может иррациональное. Наш вопрос, выше намеченный, сводится к следующему: равны ли или нет отношения (или числа) $\frac{OA}{OB}$ и $\frac{OD}{OE}$? Разобрать этот вопрос теперь возможно лишь при помощи признака, установленного в конце предыдущей главы.

Схема выяснения этого вопроса такова. Выберем какое-угодно целое число n и найдем **самое большое** число со знаменателем n, чтобы оно было все же меньше 1-го отношения $\left(\frac{OA}{OB}\right)$. Для этого мы должны разделить отрезок OB на n равных частей и посмотреть, сколько таких частей уложится на отрезке OA. Пусть от O до K укладывается m таких частей, а конец следующей, $(m+1)$-ой, части приходится уже за точкою A. Тогда самое большое число со знаменателем n, меньшее отношения $\frac{OA}{OB}$, есть дробь $\frac{m}{n}$ $\left(\text{уже дробь } \frac{m+1}{n} \text{ должна быть больше } \frac{OA}{OB}\right)$. Построив ряд параллельных, мы убеждаемся, что это же число $\frac{m}{n}$ должно быть также меньше $\frac{OD}{OE}$. Итак, даже самое большое число со знаменателем n, меньшее 1-го отношения, должно быть меньше и 2-го отношения; следовательно, всякое число со знаменателем n, меньшее 1-го отношения, должно быть также меньше и 2-го. Что значит: „со знаменателем n"? Это значит „**с любым** знаменателем", т.-е. „любое число, меньшее 1-го отношения, должно быть меньше и второго". Так как мы могли бы отношения $\frac{OA}{OB}$ и $\frac{OD}{OE}$ поменять местами, то приходим к заключению: любое число, меньшее одного из рассматриваемых отношений, должно быть меньше и другого. Итак, мы убедились, что в нашем примере нельзя найти числа, меньшего одного из наших отношений и большого другого, т.-е. наши отношения должны считаться равными:

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OD}{OE}.$$

При повторениях с учащимися подобных соображений следует брать другие комбинации отрезков. Например, $\frac{OB}{OA}$ и $\frac{OE}{OD}$ или $\frac{AB}{OA}$ и $\frac{DE}{OD}$ и т. д. Изменить предыдущее изложение и дать для этих комбинаций соответствующие чертежи—дело не трудное. Поэтому не останавливаемся на этом.

Важным побочным результатом здесь явится следующий: мы убеждаемся предыдущими соображениями в совместном существовании пропорций.

$$\frac{OB}{AO}=\frac{OE}{OD} \quad \text{и} \quad \frac{AB}{OA}=\frac{DE}{OD}.$$

Это обстоятельство указывает на возможность получения одной пропорции производной при помощи вычитания 1 из обоих отношений, т.-е. оправдывается следующая операция для отрезков, справедливость которой мы раньше знали лишь для чисел:

$$\frac{OB}{OA}-1=\frac{OE}{OD}-1;\ \frac{OB}{OA}-\frac{OA}{OA}=\frac{OE}{OD}-\frac{OD}{OD};\ \frac{OB-OA}{OA}=$$
$$=\frac{OE-OD}{OD};\ \frac{AB}{OA}=\frac{DE}{OD}$$

(центральный пункт этой операции лежит в переходе из 2-го равенства к 3-му).

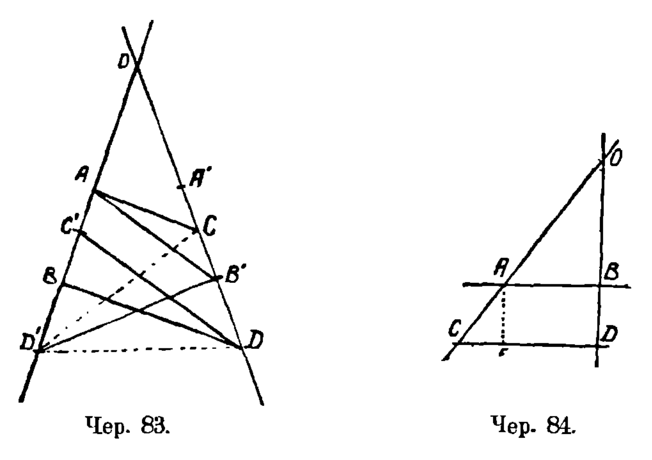
Дальнейший, и крайне существенный, шаг в том же направлении состоял бы в выяснении возможности в пропорции, составленной из отрезков, переставлять средние (или крайние) члены. Даем выяснение этого, заимствованное из книги D. Hilbert'a — „Grundlagen der Geometrie". Впрочем, следует оговориться, что полезным это выяснение окажется лишь для немногих учащихся. По отношению же к большинству придется стать на упрощенную точку зрения: каждый из отрезков, входящий в пропорцию, может быть выражен числом, принимая за единицу какой-либо определенный отрезок, и тогда с этой пропорцией явится возможность оперировать так же, как и с числовою пропорциею.

Вот выяснение Hilbert'a интересующего нас вопроса (чер. 83). Пусть $AC \parallel BD$. Тогда $\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}$. Возникает вопрос, справедлива ли

пропорция $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$. Построим: $OA'=OA$, $OB'=OB$, $OC'=OC$ и $OD'=OD$. Интересующий нас вопрос сводится к другому: параллельны ли прямые AB' и $C'D$. Рассмотрим четыреугольник $ACB'D'$. Так как $\angle OCA=\angle ODB=\angle OD'B'$ (последнее из равенства треугольников OBD и $OB'D'$), то $\angle ACB'+\angle OD'B'=2d$, т.-е. точки A, C, B' и D' лежат на одном круге. Отсюда следует, что $\angle CAB'=\angle CD'B'$, а $\angle CD'B=\angle C'DB$ (из равенства $\triangle CD'B'$ и $\triangle C'DB$). Поэтому: $\angle OB'A=\angle OCA-\angle CAB'$ и $\angle ODC'=\angle ODB-\angle C'DB$ и след. $\angle OB'A=\angle ODC'$, как разности попарно равных углов. Итак $\angle OB'A=\angle ODC'$ и, следовательно, $AB' \parallel C'D$. Отсюда вытекает справедливость пропорции:

$$\frac{OA}{OC'}=\frac{OB'}{OD} \text{ или } \frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}.$$

Переход к дальнейшему само собою намечается: мы имели дело с фигурой, изображенной на чертеже 84, где $AB \parallel CD$, и знаем, что отношение двух отрезков на одной прямой равно отношению



Чер. 83. Чер. 84.

соответствующих отрезков на другой. Мы можем в этой фигуре увидать треугольники $\triangle OAB$ и $\triangle OCD$ и увидать, что они находятся в определенном соотношении: 1) у них попарно равны углы и 2) отношение одной пары сторон этих треугольников $\left(\frac{OA}{OC}\right)$

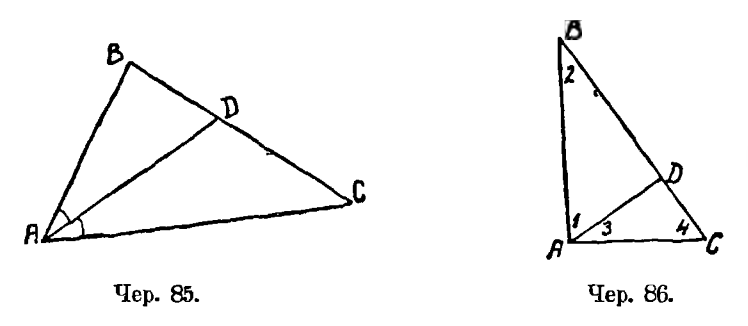
равно отношению другой пары $\left(\frac{OB}{OD}\right)$. Возникает вопрос о третьей паре, т.-е. об отношении $\frac{AB}{CD}$, — неравно ли оно каждому из предыдущих отношений? Для рассмотрения этого вопроса необходимо стороны AB и CD перенести на одну прямую. Для этого строим $AE \parallel OD$; тогда $ED = AB$, и мы опять получаем 2 прямые CO и CD, пересеченные параллельными AE и OD, откуда и следует: $\frac{DE}{CD} = \frac{OA}{OC}$ или $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$.

Построив где-либо еще $\triangle A'O'B' = \triangle AOB$, мы можем рассматривать 2 треугольника: OCD и $O'A'B'$, и у них должны быть те же соотношения для углов и сторон. Здесь устанавливается понятие о подобии треугольников. Основной способ построения *треугольника, подобного данному, состоит* в том, что данный треугольник пересекается прямою, параллельною одной из сторон. У двух подобных треугольников 1) углы попарно равны и 2) отношение одной пары сходственных сторон равно отношению другой пары и равно отношению 3-ей пары (с сокращенным словесным выражением этой зависимости—„сходственные стороны пропорциональны"—спешить не следует).

Основной признак подобия треугольников намечается само собою: наложим один $\triangle$ на другой — если их расположение окажется таким же, как на одном из предыдущих чертежей (2 стороны одного идут по сторонам другого, а третьи стороны параллельны), то треугольники подобны, для того же, чтобы получить таковое расположение, необходимо и достаточно равенство двух углов одного треугольника двум углам другого. Последнее и есть основной признак подобия треугольников. Для курса средней школы вполне достаточно ограничиться лишь этим основным признаком, а остальные два, обычно вводимые в курс, признака („если 2 стороны одного пропорциональны двум сторонам другого и углы между ними равны, то . . ." и „если 3 стороны одного пропорц. трем сторонам другого, то . . .") являются ненужным балластом для этого курса и их следует выпустить.

Учащиеся взамен того должны получше укрепиться в применениях подобия треугольников. Свойство биссектора угла треугольника (хотя бы лишь внутреннего), свойства отрезков в прямоугольном треугольнике, получаемых от построения перпендикуляра из вершины прямого угла на гипотенузу, свойство отрезков хорд или секущих, проходящих через определенную точку — все это должно быть детально разобрано и сопровождаемо рядом упражнений.

Полезною является и такая работа. Пусть начинаем исследовать свойство биссектора угла треугольника (чер. 85). Построив биссектор, например, для $\angle A$ треугольника ABC, получим $\triangle\ ABD$ и



Чер. 85. Чер. 86.

$\triangle\ ADC$. Возникает вопрос, не подобны ли они. Выяснение, почему их нельзя считать подобными, является чрезвычайно ценною работою.

При получении дальнейших свойств можно рекомендовать такой метод (чер. 86). Пусть имеем прямоугольный $\triangle\ ABC\,(\angle\ A = d)$, строим $AD \perp BC$. Разбираем $\triangle\,ABD$ и $\triangle\,ADC$. Пронумеровав острые углы этих треугольников, мы имеем возможность установить:

1) Мы видим: $\angle 1 + \angle 3 = d$.

2) мы знаем: $\angle 1 + \angle 2 = d$

отсюда заключаем: $\angle 3 = \angle 2$.

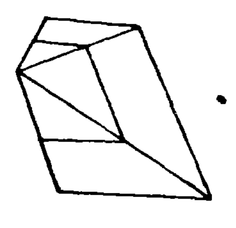
Установим, что $\triangle\,ABD \sim \triangle\,ADC$, мы имеем право написать:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Желательно написать именно равенство отношений всех трех пар сторон. Рассматривая полученную запись, мы наблюдаем (и ученики это обычно подмечают и говорят об этом), что во 2-мъ и 3-мъ отношениях имеется особенность, а именно: повторяемость отрезка AD. Установив это, мы рассматриваем только равенство 2-го и 3-го отношений и приходим в конце концов к обычной формулировке теоремы о перпендикуляре из вершины прямого угла на гипотенузу.

Возможно было бы, рассматривая этот пример более внимательно, установить, что средний пропорциональный отрезок между двумя другими всегда должен появляться, когда имеется два подобных треугольника с общею стороною, причем эта сторона не сходственна сама себе. Если учащиеся хорошо освоятся с этою мыслью, то его можно в дальнейщем курсе (например, при рассмотрении секущей и касательной) пользоваться, сокращая свою работу.

Подобие многоугольников следует рассматривать с точки зрения обобщения понятия о подобии треугольников. Прежде всего должно установить построение, аналогичное тому, какое имело место для получения подобных треугольников, чтобы при его помощи можно было получить 2 подобных многоугольника. Таковым построением является данное здесь на чер. 87 и, конечно, общеизвестное, почему оно и не требует пояснений. В обычном курсе средней школы учение о подобии многоугольников вряд ли может быть развито с большою подробностью и, быть может, даже следует выпустить обычно вводимые в курс прямую и обратную теоремы о связи между подобием многоугольников и подобием треугольников, получаемых построением диагоналей.



Чер. 87.

20. Правильные многоугольники. Длина и площадь круга.

Статья о правильных многоугольниках не требует особых методических указаний. Ограничусь лишь немногими замечаниями.

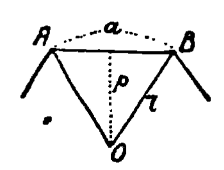
1. Исходным пунктом может явиться вопрос: мы умеем построить равносторонний треугольник и квадрат; они обладают

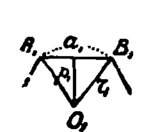
особенностью — у них равны все стороны и все углы между собою; нельзя ли построить многоугольник с бóльшим числом сторон, обладающий тою же особенностью?

2. При изучении правильного десятиугольника на первый план должно выдвинуть построение стороны правильного десятиугольника, а не ее вычисление.

3. Формулы $a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a^2_n}}$ и $b_n = \frac{2a^nR}{\sqrt{4R^2 - a^2_n}}$ в сущности, для курса ненужны, и их можно заменить несколькими частными задачами: вычислить a_{12} или b_6 (зная, что $a_6 = R$); вычислить a_8 и b_8 (зная, что $a_4 = R\sqrt{2}$). Во всяком случае, общие формулы могут появиться в курсе только после вышеуказанных примеров.

4. Пропорциональность периметров двух одноименных правильных многоугольников их радиусам или апофемам можно получить из подобия треугольников (чер. 88) и нет нужды ссылаться на подобие многоугольников. Если 2 правильн. многоугольника имеют по одинаковому числу сторон (n), то $\triangle OAB \sim \triangle O_1A_1B_1$ и из них:





Чер. 88.

$$\frac{a}{a_1} = \frac{r}{r_1} = \frac{p}{p_1} \text{ или } \frac{a \cdot n}{a_1 \cdot n} = \frac{r}{r_1} = \frac{p}{p_1}$$

Вопрос об определении длины круга принадлежит к числу сложных вопросов, — по его поводу не мало написано статей в различных журналах.

Обычное изложение требует, мотивируя это требование желанием придать изложению формальную строгость, обосновать вопрос об определении длины окружности и площади круга при помощи теории пределов, для чего в учебниках геометрии посвящается целая глава изложению начал теории пределов. Однако, возникают большие сомнения и в том, удается ли при таком способе достигнуть желаемой строгости, и в том, не слишком ли отодвигается на задний план сущность дела тем, что на передний

план выдвигается формальная сторона изложения, на которую должно быть направлено внимание учащихся. По моему глубокому убеждению, теория пределов бессильна в этом вопросе и не может охватить сущность дела. Все эти сомнения мною изложены в брошюре—„К вопросу об определении длины окружности“, материалом для которой явился мой доклад под тем же заглавием, прочитанный на 2-м Всероссийском Съезде преподавателей математики[1]). Здесь не место излагать все относящиеся сюда соображения, а необходимо лишь указать ту систему прохождения этой части курса, которая, с одной стороны, по возможности упрощала бы дело, а с другой, по возможности, выдвигала бы суть дела на первый план.

Исходным пунктом, без чего нельзя и ставить вопроса об измерении длины окружности, является всеми отчетливо сознаваемое представление о возможности, как бы перерезав окружность, выпрямить ее,—получаемый таким образом в представлении прямолинейный отрезок и есть длина круга[2]). Заменять это отчетливое представление словесным определением—„длиною окружности называется предел, к которому стремится периметр правильного вписанного (или описанного) многоугольника при безграничном увеличении числа его сторон“—значит впадать в схоластику, и такая замена является с педагогической точки зрения большим грехом. С точки зрения истинной науки (а не схоластики) тут оказывается пробел, который восполнить, повидимому, нельзя, а именно игнорируется выяснение того, совпадает ли это словесное определение с имеющимся в нашем сознании представлением о длине круга.

Далее вопрос развивается в таком порядке. Мы не обладаем способом построения такого прямолинейного отрезка, который заведомо был бы равен выпрямленному кругу. Поэтому мы не имеем возможности выполнять измерение длины круга линейною

---

[1]) См. «Доклады, читанные на 2-м Всероссийском Съезде препод. математики,» стран. 186 и т. д.

[2]) Мы употребляем на равных правах выражения: «длина окружности» или «длина круга», площадь окружности или «площадь круга». (См. гл. 6). В гл. 10 выяснено, что термины «круг» или «окружность» здесь употребляются, как синонимы.

единицею прямо, а принуждены искать косвенные способы. Таких способов намечается два. 1. Мы можем взять какой-либо многоугольник (лучше правильный), вписанный в круг, и выпрямить его периметр. Получим определенный отрезок. Этот отрезок имеет определенную близость к „длине круга“, и эта близость тем больше, чем больше вершин многоугольника лежит на окружности. Отсюда возникает мысль о возможности для целей измерения рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон.

2. Мы можем начать с выпрямления периметра правильного описанного около круга многоугольника и, увеличивая число его сторон, также притти к той же мысли, что мы можем для целей измерения рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон.

Нет, конечно, надобности педантично избегать и слова „предел“, и учащиеся могут установить, что длину окружности можно рассматривать, как предел для изменяющегося выпрямленного периметра правильного вписанного (или описанного) многоугольника при бесконечном увеличении числа его сторон.

Если позволяет время, то этот вопрос можно рассмотреть более подробно: 1) можно установить, что выпрямл. периметр каждого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного; 2) можно установить возможность построения двух правильных многоугольников, вписанного и описанного, разность периметров которых меньше любого наперед заданного отрезка; 3) можно, откладывая ряд периметров и вписанных и описанных многоугольников на прямой от определенной точки, притти к заключению, что длину круга следует считать как бы границею между множеством отрезков, выражающих выпрямленные периметры вписанных многоугольников, и множеством отрезков, выражающих периметры описанных многоугольников. Такой граничный отрезок является возможным рассматривать, как выпрямленный периметр прав. вписанного или описанного многоугольника с бесконечно большим числом сторон.

Такое подробное развитие дано (мелким шрифтом) в моем курсе „Геометрия на плоскости“. Однако, на практике с учениками приходится довольствоваться только тем, что 1) учащиеся

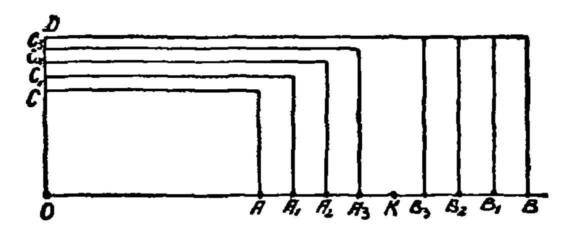
признают, согласно своим представлениям, возможность рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон и 2) учащиеся признают возможность рассматривать два круга, как правильные одноименные (хотя и с бесконечно большим числом сторон) многоугольники. Отсюда вытекает возможность признать справедливою пропорциональность их периметров (или „длин" этих кругов) их радиусам или диаметрам, откуда и явится переход к числу π.

По поводу числа π необходимо установить, что его легко вычислить с точностью до единицы, а именно: легко получить, с помощью прав. описанного шестиугольника и описанного четыреугольника, что

$$3 < \pi < 4.$$

Полагаю, что совершенно излишняя трата времени будет иметь место в том случае, если учащихся привлекают к вычислению числа π с большею точностью. Достаточен тот результат, который получается от вычисления с точностью до 1 и от сознания, что можно при помощи правильных вписанных и описанных многоугольников вычислить число π с большею точностью, для чего лишь придется проделать целый ряд (и иногда утомительных) вычислений.

По отношению к измерению площади окружности наиболее тонким вопросом является следующий: площадь круга, будучи



Чер. 89.

больше площади любого вписанного многоугольника и меньше площади любого описанного многоугольника (это непосредственно ясно), является общею границею между площадями вписанных и описанных многоугольников (чер. 89). Если на прямой откла-

дывать выпрямленные периметры прав. вписанных многоугольников OA, OA_1 OA_2... и периметры правильных описанных многоугольников OB, OB_1 OB_2... с постепенно увеличивающимся числом сторон, то границею между ними явится некоторый отрезок OK, представляющий собою длину круга. Если затем строить прямоугольники CA, C_1A_1, C_2A_2..., равновеликие площадям вписанных прав. многоугольников (след., OC, OC_1 OC_2... суть их апофемы) и ряд прямоугольников DB, DB_1, DB_2..., равновеликих площадям описанных прав. многоугольников (след., OD = радиусу круга), то должен существовать некоторый граничный прямоугольник, площадь которого больше площади любого (не только правильного) вписанного многоугольника и меньше любого описанного. Возникает вопрос: совпадает ли этот граничный прямоугольник с прямоугольником DK, основанием которого служит отрезок OK, представляющий длину круга?

Подробные соображения по поводу этого вопроса изложены в вышеуказанных брошюре и докладе — „К вопросу об определении длины круга". В классе в громадном большинстве случаев придется ограничиться тем, что раз мы пришли к мысли о возможности рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон, то и измерение его площади можно выполнять так же, как площади правильного многоугольника, т.-е. придется измерить его периметр (т.-е. длину круга), измерить его апофему (т.-е. радиус круга), перемножить полученные числа и разделить на 2.

Важными упражнениями здесь являются вопросы: во сколько раз увеличится площадь круга, если его радиус увеличится в 2 раза? в 3 раза? и т. д.

Вот схема таких упражеений.

Пусть	радиус	= 1 дм.;	тогда	площадь	круга	= π кв. д.
„	„	= 2 дм.;	„	„	„	= 4π кв. д.
„	„	= 3 дм.;	„	„	„	= 9π кв. д.
„	„	= n дм.;	„	„	„	= πn^2 кв. д.
„	„	= r;	„	„	„	= πr^2
„	„	= $2r$;	„	„	„	= $4\pi r^2$
„	„	= $5r$;	„	„	„	= $25\pi r^2$ и т. д.

21. Начала стереометрии.

Прохождение первых глав стереометрии должно направляться такою общею мыслью. Изучение различных комбинаций на плоскости привело к установлению основных геометрических понятий, определяющих собою ту или иную особенность расположения. Таковыми понятиями являются: 1) параллельность прямых, 2) перпендикулярность прямых и 3) угол. Теперь работа переходит в более широкую область: раньше работали на плоскости, теперь переходим в пространство. И материал, над которым приходится работать, становится разнообразнее: раньше все время была лишь одна плоскость, теперь — в пространстве — их имеется бесконечно много. В этой работе направляющею мыслью должно служить на первых порах стремление расширить, обобщить идею параллельности, идею перпендикулярности, идею угла на более разнообразные пространственные формы.

Наиболее удобным является такое строение курса: 1) параллельность в пространстве; 2) перпендикулярность в пространстве; 3) комбинации, где входят и параллельные и перпендикулярные элементы, и 4) обобщение понятия об угле (угол между двумя непересекающимися прямыми, угол, составленный прямой и плоскостью, двугранный угол, трехгранный и многогранный угол) [1]).

Исходным пунктом для развития идеи параллельности является задача: через данную точку построить прямую, параллельную данной прямой; мы умеем решать такую задачу на плоскости и знаем, что ей соответствует постулат, что такая прямая возможна лишь единственная. Возникает вопрос о перенесении этого построения в пространство. Такое перенесение не встречает никаких затруднений, так как данною прямою и данною вне ее точкою определяется положение плоскости, на которой приходится повторить уже известное планиметрическое построение. Разбирая это построение, можно притти к мысли, что термин „параллельные"

---

[1]) Такое строение курса проведено в моей «Геометрии в пространстве».

прямые следует и для пространства принимать не только как непересекающиеся прямые, но и расположенные в одной плоскости. Учащиеся должны, хотя бы лишь при помощи палочек, достигнуть отчетливого представления о существовании в пространстве прямых и не пересекающихся и не параллельных — их иногда называют скрещивающимися прямыми. Итак, здесь будет установлено, что через любую точку пространства можно построить прямую, параллельную данной, и только единственную. Далее возникает мысль расширить понятие о параллельности, применяя его к плоскости и прямой или к двум плоскостям. Такое расширение находится в зависимости от того, удастся ли или нет построить плоскость и прямую или две плоскости, не пересекающиеся друг с другом. К первому расширению приходим построением прямой, параллельной какой-либо прямой, лежащей на плоскости. Разбирая это построение, приходим к заключению, что через точку можно построить бесконечно много прямых, параллельных данной плоскости. Ко второму расширению понятия о параллельности приходим, рассматривая в предыдущем построении данную плоскость и ту, которая определяется парою прямых, построенных через данную точку параллельно данной плоскости. Здесь возникает вопрос: таких пар параллельных прямых можно через данную точку построить бесконечно много — совпадают ли или нет определяемые ими плоскости? Когда удастся выяснить обязательность совпадения, приходим к установлению положения, что через данную точку можно построить плоскость, параллельную данной, и только единственную.

Естественный порядок развития учения о перпендикулярности в пространстве представляется таковым. На плоскости мы ознакомились с особым расположением двух прямых, выражаемом термином „перпендикулярные прямые“, причем были решены две основные задачи: 1) дана прямая и точка на ней; построить через данную точку перпендикуляр к данной прямой; 2) дана прямая и точка вне ее; построить через данную точку перпендикуляр к данной прямой. Каждая из этих задач имела лишь единственное решение. Теперь возникает потребность решить те же две задачи в пространстве. Решение каждой из них легко сводится к планометрическому построению. В первой задаче

через данную прямую строим любую плоскость и на ней выполняем построение перпендикуляра. Во второй задаче данными прямою и точкою определяется лишь единственная плоскость, на которой надо выполнить соответствующее построение. Обращает на себя внимание особенность первой задачи: через точку, взятую на данной прямой, можно построить к этой прямой бесконечно много перпендикуляров. Тогда возникает вопрос: нет ли особенности в расположении этих перпендикуляров? И непосредственное представление, и рассуждения (они даны в моей „Геометрии в пространстве“) позволяют установить, что все эти перпендикуляры расположены в одной плоскости. В курсе средней школы, быть может, следует в этом вопросе довольствоваться непосредственным представлением. Раз эта особенность установлена, то является, следов., возможность установить особенность расположения данной прямой и полученной плоскости: данная прямая перпендикулярна к любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения плоскости с данною прямою. Благодаря этой особенности, является возможным расширить понятие о перпендикулярности и называть данную прямую и полученную плоскость перпендикулярными между собою. Возникает вопрос, как 1-е основные задачи должны иметь место на построение перпендикулярных между собою прямой и плоскости. И легко уясняется, что их должно быть не 2, как на плоскости, а 4. Построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой, через точку, 1) данную на прямой и 2) данную вне прямой; построить прямую, перпендикулярную к плоскости, через точку, данную 1) на плоскости и 2) вне плоскости. Надо эти задачи решить, причем последняя из них может привести к рассмотрению комбинаций, где сочетаются перпендикулярные и параллельные элементы. Подробное рассмотрение этих комбинаций имеется в моей „Геометрии на плоскости“. Дальнейшее обобщение понятия о перпендикулярности, а именно вопрос: можно ли, и при каких условиях, установить понятие о двух перпендикулярных плоскостях, приходится отложить до того момента, когда, обобщая понятие об угле, придем к двугранным углам.

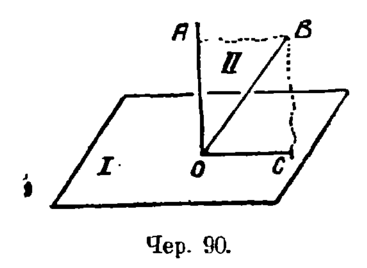
Обобщение понятия об угле идет в такой последовательности. То, что мы раньше называли именем угол, есть объект, состоя-

щий из точки и двух выходящих из нее лучей. Нельзя ли обобщить это понятие так, чтобы 1) признавать за угол объект, составленный двумя пересекающимися плоскостями, которые как бы обрезаны по прямой пересечения; 2) принимать, что и 2 непересекающиеся прямые образуют угол; 3) считать, что плоскость и прямая, пересекаясь, образуют угол и 4) признать за углы объекты, составленные тремя, четырьмя и т. д. плоскостями, сходящимися в одной точке.

По поводу первого из этих шагов следует обратить внимание на аналогию: там (в обыкновенном угле) точка — вершина угла, здесь прямая — ребро двугранного угла; там из вершины идут, в одном направлении каждая, две стороны, здесь от ребра идут, в одном направлении каждая, две грани. Обычное доказательство теоремы, что равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы, желательно заменить решением задачи: дан обыкновенный угол; построить двугранный угол так, чтобы данный угол оказался для него линейным. То обстоятельство, что задача имеет лишь одно решение, должно заменять доказательство вышеуказанной теоремы.

По поводу 3-го шага в этом обобщении следует заметить, что необходимо сначала (а этого обыкновенно не делают) остановиться на случае, когда прямая перпендикулярна к плоскости. В этом случае удобно принять, что „прямая и плоскость составляют прямой угол“, выражая этим тот факт, что прямая составляет прямые углы со всеми прямыми, лежащими на плоскости и проходящими через основание перпендикуляра (впрочем, теперь, когда сделан 2-ой шаг обобщения, последняя оговорка и не нужна). Естественен после этого переход к случаю, когда прямая не есть перпендикуляр к плоскости. Здесь является прежде всего потребность исследовать те углы, которые наклонная образует с разными прямыми, проходящими по плоскости через основание наклонной. Выяснится, что среди этих углов есть наименьший (угол наклонной с ее проэкцией), наибольший (угол наклонной с продолжением ее проэкции), причем эти углы постепенно переходят от наименьшего к наибольшему. Удобно принять за угол прямой и плоскости наименьший из этих углов. Удобство это ясно из рассмотрения следующего построения (чер. 90). Пусть по-

строено $OA \perp$ I плоск., OB — наклонная; построим еще плоскость II, определяемую OA и OB — она пересечется с I плоск. по прямой OC. Тогда OC есть проэкция наклонной OB; $\angle AOC = d$, $\angle AOB$ есть угол, составляемый прямыми OA и OB; $\angle BOC$ дополняет $\angle AOB$ до прямого. Так как мы уже приняли, что OA составляет прямой угол с I плоск., так как мы видим тот угол ($\angle AOB$), который наклонная OB составляет с перпендикуляром OA, то удобно принять за угол, составляемый OB и I плоскостью, тот, который дополняет $\angle AOB$ до прямого, а таковым является $\angle BOC$.



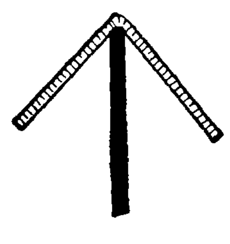
Чер. 90.

По поводу 4-го шага обобщения понятия об угле следует указать, что обычное изложение статьи о трехгранных и многогранных углах в той его части, которая дает свойства плоских углов, следует отбросить. Вот схема того урока, какой нужно посвятить разбираемому вопросу.

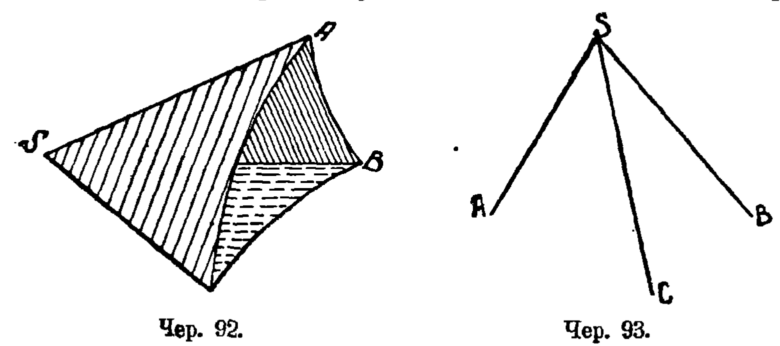
Урок посвящается ознакомлению с трехгранными углами. Основная мысль урока — добиться рельефного представления о строении трехгранного угла и об его свойствах, минуя доказательство теорем по учебникам. В зависимости от того, как шел курс геометрии до этого момента, следует обратить в той или иной степени на идею обобщения, имеющую место в стереометрии. Речь идет об обобщении понятия угол: сначала (в курсе планиметрии) мы знали лишь обычный угол, т.-е. фигуру, составленную из двух лучей, исходящих из одной точки. Постепенно это воззрение расширяется: 1) устанавливается возможность говорить, что и две прямые, непараллельныя и непересекающиеся, образуют угол; 2) устанавливается возможность говорить, что перпендикуляр к плоскости составляет с этою плоскостью прямой угол: 3) устанавливается возможность говорить об угле между плоскостью и наклонной к ней; 4) устанавливается возможность говорить о двугранном угле и 5) устанавливается возможность еще расширить понятие об угле, рассматривая фи-

гуру, состоящую из нескольких плоскостей, пересекающихся в одной точке. Простейшим из последней категории углов является трехгранный угол.

Показывается прежде всего модель, сделанная из картона, трехгранного угла, на которой учащиеся показывают вершину, ребра и грани (названия эти здесь же им и сообщаются); затем показывается трехгранный угол при помощи трех палочек, сходящихся концами, где их и держат рукой (чер. 91). Здесь учащиеся видят вершину, видят ребра и должны притти к мысли, что этим самым определены и грани трехгранного угла: каждою парою ребер (а таких пар 3), как двумя пересекающимися прямыми, определяется положение плоскости. На этих же двух моделях показывается учащимся, что в каждом трехгранном угле имеется 3 обыкновенных угла („плоские“ углы), каждый из которых образован двумя ребрами, и 3 двугранных угла, каждый из которых образован двумя гранями. В соответствии с показанными моделями трехгранных углов на доске выполняются их рисунки (чер. 92 и чер. 93). На этих рисунках вновь ищутся: вершина, ребра, грани, плоские углы и двугранные углы.



Чер. 91.

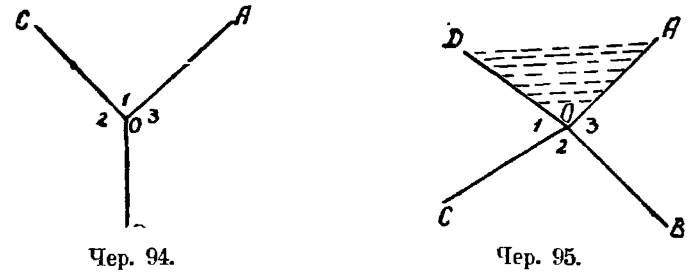


Чер. 92. Чер. 93.

Затем полезны следующие вопросы: 1) на чер. 93 я вижу плоские углы: $\angle ASB$, $\angle ASC$, $\angle CSB$; правда ли, что здесь $\angle ASC$ сложен с $\angle CSB$? Если учащиеся в предыдущем хорошо

усвоили процесс сложения углов, то они не затруднятся дать ответ: нет, неправда, потому что сложение углов выполняется на одной плоскости, а углы ASC и CSB расположены в разных плоскостях. Имея в виду других учащихся, для которых это не столь ясно. надо обратиться к рисунку на чер. 92 и к модели трехгранного угла, составленного из палочек, и подтвердить вышеуказанный ответ. 2) На чер. 93 я вижу плоские углы ASC и ASB; правда ли, что $\angle ASB > \angle ASC$? Опять-таки, те из учащихся, которые отчетливо представляют себе трехгранный угол, дадут ответ: этого наверное утверждать нельзя, так как эти углы лежат в разных плоскостях. Следует опять-таки иллюстрировать этот ответ на модели трехгранного угла, составленного из палочек.

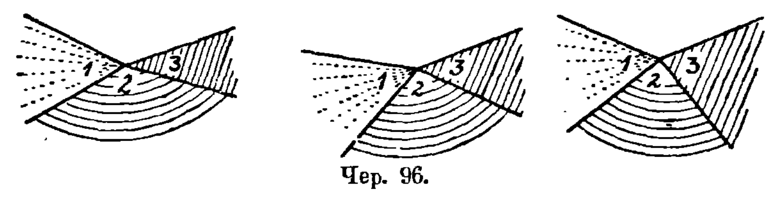
После этого явится возможность предложить вопрос: как получить трехгранный угол, чтобы его плоскими углами служили $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$, построенные на плоскости так, как на чер. 94,



Чер. 94. Чер. 95.

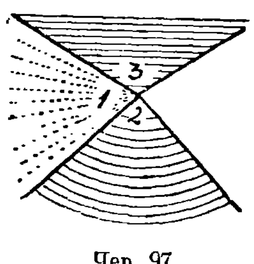
или так, как на чер. 95. Ответ легко находится учащимися: надо, если имеем дело со случаем, данным на чер. 95, перегибать плоскость по лучам OB и OC, добиваясь того, чтобы свободные лучи OA и OD совпали, причем надо предварительно удалить из плоскости ее часть, затушеванную на чер. 95; что касается случая, данного на чер. 94, то здесь мы лишены возможности образовать из $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$ трехгранный угол. После выяснения этого учащиеся приходят сами к заключению, что для получения трехгранного угла надо построить на плоскости вокруг точки 3 таких угла, чтобы их сумма была меньше $4d$. Так как эти углы после перегибания сделаются плоскими углами трехгранного, то приходим к заключению: с у м м а п л о с к и х у г л о в т р е х г р а н н о г о у г л а $< 4d$.

Затем надо иллюстрировать самое перегибание плоскости, какое выше уже намечено, заготовленными заранее моделями (чер. 96). Желательно, чтобы ∠1, ∠2 и ∠3 были на каждой модели разных цветов (на чер. 96 внутренняя область каждого из углов —



Чер. 96.

∠1, ∠2 и ∠3—затушевана различными штрихами). I модель, данная на чер. 96, не приведет к образованию трехгранного угла, также не даст трехгранного угла и II модель, и лишь III модель приведет к получению трехгранного угла. Исследование причин этого приведет учащихся к заключению, что I модель не дала трехгранного угла потому, что ∠1+∠3<∠2, II модель также не привела к трехгранному углу потому, что ∠1+∠3=∠2, а III модель, где ∠1+∠3>∠2, дает трехгранный угол. Так как возможно, напр., ∠3 переставить так, как на чер. 97, то придем к заключению, что для того, чтобы получился трехгранный угол, надо при точке построить 3 угла так, чтобы сумма двух из них была больше третьего, откуда получаем, наконец, свойство трехгранных углов: **каждый плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.**



Чер. 97.

Если имеется в запасе достаточно времени, то возможно здесь обратить внимание на аналогию последнего свойства плоских углов трехгранного угла с известным уже свойством сторон треугольника, тогда может возникнуть мысль о том, не связаны ли между собою эти свойства так, что одно из них можно вывести, опираясь на другое. И вот появляется возможность ввести в курс то „доказательство“ теоремы „Плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов“, какое обычно имеется в на-

ших учебниках геометрии, но теперь уже цель введения этой теоремы состоит не в том, как это, к сожалению, обычно делается, чтобы из ее доказательства узнать указываемое свойство плоских углов, а в том, чтобы привести в причинную связь это, уже известное, свойство трехгранного угла с аналогичным, также уже известным, свойством треугольника. Здесь возникает возможность обратной постановки вопроса: как, исходя из свойства плоских углов (один плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов), получить аналогичное свойство сторон треугольника? Конечно, сделать это нетрудно: придется воспользоваться тем же построением, какое обычно употребляется, но вести рассуждения в обратном порядке, — на этом не останавливаюсь.

Думаю, что предлагаемое здесь изложение должно оказать большее влияние, чем при обычном изложении, и на развитие геометрического представления учащихся и на стремление привести разрозненные факты в логическую связь.

Заканчивая, считаю необходимым указать на необходимость введения в соответствующих местах курса рассмотрения ряда вопросов, существенных и для практических применений и для геометрического развития. Вот эти вопросы.

1. Дана в пространстве точка; сколько можно построить через нее прямых так, чтобы каждая к каждой была перпендикулярна (взаимно-перпендикулярных прямых)?

После рассмотрения этого вопроса явится возможным установить, что плоскость имеет 2 измерения, а пространство 3 и, быть может, указать на возможность геометрии 4 и более измерений.

2. Много ли можно найти в пространстве точек, равноотстоящих от двух данных? Где они расположены (короче: каково геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от двух данных точек)? Каково геометрическое место точек пространства, равноотносящих от трех данных точек?

3. Каково геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от двух параллельных прямых? Равноотстоящих от двух пересекающихся прямых? От трех, пересекающихся в трех точках, прямых (или от трех прямых, из которых 2 параллельны, а третья пересекает их обоих)?

4. Каково геометрическое место точек пространства, равноотстоящих от двух параллельных плоскостей? От двух пересекающихся плоскостей? От трех плоскостей, пересекающихся по трем параллельным прямым? От граней трехгранного угла? и т. д.

Наконец, полагаю, что следует присоединить сюда так называемую теорему Эйлера для незамкнутых многогранных поверхностей (число граней и вершин вместе на 1 больше числа ребер) и для многогранника (сумма чисел граней и вершин многогранника на 2 больше числа его ребер). Конечно, при введении этих теорем надо иметь в виду, что они справедливы для односвязных поверхностей и многогранников.

На теореме Эйлера легко, и с большим интересом для учащихся, строится теория правильных многогранников[1]).

22. Измерение поверхностей и объемов тел.

По поводу вопросов об измерении поверхностей и объемов следует прежде всего сделать общее замечание. Необходимо добиться, чтобы учащийся видел поверхность какого-либо тела, видел его объем. Сколь много недоразумений и ошибок со стороны учащихся приходилось отмечать в педагогической практике, ошибок, в основе которых лежит именно отсутствие этой видимости. Конечно, неизбежно для достижения этой видимости широко пользоваться моделями.

Обычно измерение поверхностей начинают с рассмотрения боковой поверхности любой призмы. Думается, что лучше было бы начать с прямой призмы, потому, что этот случай наиболее нужен для практики.

Измерение объемов обычно рассматривается в учебниках геометрии в должном порядке: объем прямоугольного параллелепипеда, прямого, наклонного, объем призмы, объем полной пирамиды, объем усеченной пирамиды.

Способы рассмотрения каждого из этих вопросов могут быть разные. Мною в моей „Геометрии в пространстве“ избраны приемы, хотя и не часто употребляющиеся в педагогической практике, но, как показал опыт, наиболее удобные для учащихся, привыкших к исследованию геометрических вопросов, а не к

[1]) См. мою «Геометрию в пространстве».

формальным доказательствам объявляемых теорем. Здесь эти приемы повторять было бы излишне. Обращу внимание лишь на одно обстоятельство.

В методических статьях за последнее время часто можно встретить пожелание обосновать учение об измерении объемов на принципе Кавальери. Думается, что здесь правильная точка зрения такова: измерение объемов параллелепипедов и призм настолько легко поддается представлению, что для них вводить принцип Кавальери нет надобности. Когда же приходится переходить к измерению объема пирамиды, то встречаемся с особою трудностью: нет возможности (и это доказано) треугольную пирамиду превратить в равновеликую ей призму или в равновеликую другую треугольную пирамиду, не конгруэнтную с первой, так, чтобы эта равновеликость поддавалась непосредственному представлению, как суммы или разности конечного числа попарно конгруэнтных объемов. И вот здесь-то, вместо того, чтобы строить ряд входящих и исходящих призм, как то общепринято, удобно воспользоваться принципом Кавальери. Две треугольные пирамиды с равновеликими основаниями и равными высотами разбиваются рядом плоскостей, параллельных основаниям на слои. Каждый из этих слоев, если секущие параллельные плоскости стремятся к сближению, можно рассматривать, как призму. Если пересекать наши две пирамиды плоскостями на одинаковых расстояниях от вершин, то эти бесконечно тонкие слои можно рассматривать, как попарно равновеликие призмы, откуда и приходим к заключению о равновеликости треугольных пирамид, имеющих равновеликие основания и равные высоты [1]).

Вопросы об измерении поверхностей и объемов круглых тел теряют ту остроту, какая здесь имеет место при обычном пользовании теориею пределов, если опираться на возможность рассматривать круг, как правильный многоугольник с бесконечно большим числом сторон [2]). Обратим внимание интересующихся на изложение относящихся сюда вопросов в книге—Вебер и Вельштейн—„Энциклопедия элементарной математики“ (том II, книга III).

---

[1]) См. мою «Геометрию в пространстве».

[2]) См. мою «Геометрию в пространстве».

III. Методика начального обучения геометрии.

23. Особенности и план начального курса геометрии.

В nn^o 5 и 6 выяснены как увлечения современной методической мысли по отношению к геометрии, так и ошибки современной методики геометрии. Поэтому тот „пропедевтический“ курс геометрии, который предназначен для маленьких учащихся и который связан с этими увлечениями, приходится отвергнуть [1]. Однако, самая мысль начать обучение геометрии с малого возраста заслуживает полного внимания. И маленьких детей можно учить геометрии, но только это надо делать так, чтобы на протяжении обучения дети осваивались бы, насколько это согласуется с их развитием, а, следовательно, и с возрастом, с характером той работы, какая свойственна геометрическим изысканиям. Важно не то, чтобы в голове ребенка накопилась масса знаний геометриечского характера, а важно то, чтобы сознание ребенка проделало бы, хотя бы и маленькую, но чисто-геометрическую работу.

Для классного обучения геометрии наиболее подходящим моментом для начала курса геометрии является 3-й год обучения или, быть может, вторая половина 2-го года. Для начальной школы с четырехлетним курсом является возможным построить маленький курс начал геометрии (будем его называть „Начальный курс“), связанный до известной степени с арифметикой. При пятилетнем курсе или при наличности благоприятных условий и при четырехлетнем курсе явится возможность увеличить материал курса и достигнуть уже сравнительно большого развития геометрического представления у учащихся и, быть может, большего, чем то, какое имелось у большинства учеников, окончивших нашу прежнюю среднюю школу.

Начальный курс геометрии, так же, как и вообще всякое обучение геометрии, должен опираться на те основные пожелания,

---

[1]) Образцы таких курсов представляют собою учебники Астряба, Кемпбеля, Кулишера, Гебеля (по Горнбруку) и др.

которые изложены в $n^{\circ}7$, где выяснен желательный характер вообще для курса геометрии. Однако, начальный курс должен иметь и некоторые особенности.

Первая категория особенностей имеет своею причиною то обстоятельство, что психика детей не может выполнять ту работу, которая требует продолжительного внимания и запечатления отдельных ее моментов. Такою работою является врежде всего сопоставление нового геометрического образа с разученными ранее и получение из этого сопоставления каких-либо выводов. Лишь на 5-м году обучения таковую работу можно ввести в курс, да и то с известною осторожностью. Результатом этого общего соображения явится необходимость значительно сократить тот материал, который должен быть проработан в начальном курсе. Так, думается, ни на третий, ни на 4-ый годы обучения было бы неуместно вводить признаки равенства треугольников и пользоваться этим равенством для получения каких-либо свойств более сложных фигур. Лишь наличность особенно благоприятных условий может позволить ввести в дело равенство треугольников во 2-ой половине 4-го года обучения. Так же точно много сомнений возникает по поводу введения в курс 3-го или 4-го года обучения учения о подобии треугольников. С одной стороны, идея подобия, иллюстрируемая фотографиями, планами и т. п., представляется вполне доступной детскому разумению. Но, с другой стороны, нельзя не согласиться, что эта идея подобия у детей, и даже не маленьких, имеется лишь в форме какой-то неясной интуиции, а задача ввести сюда отчетливость представляется крайне трудною для методиста-геометра. И вот, не смотря на желательность возможно раннего ознакомления детей с подобием плоских фигур, не смотря на значение подобия для практики, приходилось, за недостатком методической разработки этого вопроса, отказываться от введения учения о подобии в начальный курс геометрии. Если же на практике и приходилось встречаться с тем или иным проявлением идеи подобия, то приходилось довольствоваться только теми туманными интуициями о „сходстве“, которые имеются у детей под влиянием жизненного опыта. Таким образом введение в начальный курс геометрии учения о подобии—дело будущего, когда появится ряд работ по этому вопросу.

Другая категория особенностей начального курса имеет причиною то обстоятельство, что ученики, окончившие начальную школу с 4—5 летним курсом (а иногда и с трехлетним), этим и заканчивают свое образование. В таком случае школе приходится озаботиться о том, чтобы снабдить их практическими умениями, которые им могут пригодиться в их жизни. И на геометрию падает доля этой заботы. Отсюда вытекает надобность дать учащимся на протяжении начального курса геометрии несколько практических сведений. К этим практическим геометрического характера сведениям можно отнести и кое-какие сведения из области подобия, о котором шла речь выше. Однако, на эту сторону курса так и надо смотреть, что здесь мы сообщаем учащимся ряд практических умений, а забота об их геометрическом развитии здесь отходит на задний план. Поэтому здесь уже не приходится заботиться о том, чтобы учащиеся ясно себе представили непреложность того или иного сообщаемого сведения, а забота должна быть направлена главным образом на то, чтобы учащиеся запомнили эти сведения и умели бы их применять к практике. К области этих сведений относятся вопросы об измерении площадей различных фигур и об измерении объемов различных тел.

Если, как это указано выше, распределить начальный курс геометрии на 3 года, на 3-ий, 4-ый и 5-ый года обучения, то намечается такой план этого курса.

3-ий год обучения. Прямолинейные отрезки, углы; операции над ними. Треугольник. Понятие о параллельности. Прямой угол. Квадрат и прямоугольник.

4-ый год обучения. Измерение площадей параллелограмма, треугольника, трапеции. Измерение углов градусами. Длина и площадь круга. Построение сетки куба; куб. Измерение объемов.

5-ый год обучения. Построение угла, равного данному. Равенство треугольников. Равнобедренный треугольник. Построение параллельных прямых. Изучение параллелограмма, ромба, прямоугольника. Изучение при помощи куба взаимного расположения плоскостей и прямых в пространстве. Геометрические места точек плоскости и пространства, находящихся на данном расстоянии от данной точки или данной прямой, находящихся на равных расстояниях от двух или трех данных точек, от двух

параллельных прямых или плоскостей, от двух пересекающихся прямых или плоскостей и т. п.

В пояснение этой краткой программы следует дать несколько указаний.

Курс 3-го года обучения должен состоять в приобретении учащимися ряда умений (вроде: „я умею строить угол“, „я умею строить прямой угол“), причем после приобретения умения строить квадрат и прямоугольник явится прочная опора для изучения квадратных мер и для измерения площадей прямоугольников. Таким образом желательно статью о квадратных мерах из арифметики перенести в геометрию (или, по крайней мере, тесно их связать). Само собою разумеется, что уже в таком случае не следует проходить квадратные меры на 2-м году обучения.

В 4-ый год обучения явится возможность расширить практическую часть курса рассмотрением вопросов об измерении площадей различных фигур. Построение сетки куба и получение при помощи перегибания этой сетки самого куба даст прочное основание для изучения кубических мер и для измерения объемов. Таким образом статью о кубических мерах из арифметики следует перенести на 4-ый год обучения и связать ее с геометрией.

В 5-ый год обучения уже надлежит особое внимание обратить на чисто-геометрическую сторону курса, для чего необходимо ввести в дело циркуль. И надо, чтобы каждый учащийся имел циркуль и выполнял при его помощи ряд работ. Основным построением является здесь построение угла, равного данному; при помощи этого построения является легкая возможность перейти и к построению параллельных прямых и к изучению признаков равенства треугольников и затем, конечно, к использованию этих признаков для изучения других геометрических фигур. Что касается заглавия программы — „Равнобедренный треугольник“, то это заглавие приведено в рубрике для 5-го года обучения потому, что, быть может, удобнее всего именно на 5-м году обучения использовать свойства равнобедренного треугольника с практическою целью построения прямых углов на местности. Геометрическая же сторона этого вопроса настолько проста, что она доступна, пожалуй, даже и на 3-ий год обучения. Поэтому является полная возможность перенести изучение свойств равно-

бедренного треугольника на 4-ый или даже 3-ий год обучения. Что касается двух последних частей курса „Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве“ и „Геометрические места точек . . .“, то им следует придавать существенное значение для геометрического развития учащихся, но для успеха дела необходимо, чтобы сами учащие овладели бы этими вопросами в совершенстве.

Мною сделана попытка составить руководство для предлагаемого в выше указанном плане начального курса геометрии. Эта попытка вылилась в форме книги — „Начальный курс геометрии“, которая должна помогать учителю вести дело с учениками 3-го и 4-го годов обучения, а ученикам на руки может быть дана лишь на 5-м году обучения, и задачника — „Упражнения по начальному курсу геометрии“, который уже дается на руки ученикам, начиная с 3-го года обучения (т.-е. с самого начала курса геометрии).

24. Детали курса геометрии на 3-м году обучения.

Наиболее удобным началом занятий геометриею является установление признания возможности построить прямую линию. Сделать это можно, например, в такой форме. Учащимся раздаются нелинованные тетради и линейки (очень удобно пользоваться бумажными линейками, получаемыми при помощи перегибания куска бумаги, лучше бумаги толстой). Учитель заявляет классу, что он умеет рисовать прямую линию и спрашивает учащихся, умеют ли это делать и они. На основании своего жизненного опыта учащиеся признают за собою это умение, упражняются в рисовании прямых линий при помощи линейки. Здесь явится возможным заменить слово „рисовать“ термином „строить“. Следует обратить внимание на 2 обстоятельства: 1) отучить учащихся от употребления терминов „косая“, „наклонная“ и т. п. для называния прямых линий, построенных не параллельно горизонтальному краю доски, — прямая линия остается прямой, как бы ее ни располагали по отношению к привычным для нас предметам; 2) обратить внимание учащихся, что прямая линия видна уже тогда, когда мы только приложим линейку к поверхности доски

или тетради, но еще не обвели ее мелом или карандашом, видна, как граница между линейкою и доскою. Далее является возможным установить, что прямую линию можно продолжить, „как хотим, далеко“, т.-е., что у нее нет концов. Необходимо также, разбирая поверхности различных физических предметов (поверхность доски, поверхность графина, поверхность лица, поверхность яблока), установить, что прямые линии можно строить, без каких-либо ограничений, лишь на особых поверхностях — вводится термин „плоская поверхность или плоскость“ (поверхность доски — „будто плоская поверхность“). Затем учащиеся признают за собою умение строить точки, после чего начинается работа изучения постепенно усложняющихся комбинаций: точка на прямой, прямая и две точки на ней (см. n°8). Эта работа развивается почти совершенно так же, как то изложено в n°8. Приходится делать лишь некоторые небольшие отступления для облегчения этой работы, имея в виду, что учащиеся маленькие. Одно из наиболее важных отступлений будет дано ниже. Здесь же необходимо остановиться на одном обстоятельстве. В предыдущем сделан лишь маленький шаг к тому, чтобы учащиеся не смешивали настоящие прямые линии и точки с теми меловыми (или карандашными) чертежами и кружками, которыми они рисуются, — шаг этот имеет место в обращении внимания учащихся, что прямую линию можно видеть, когда она еще не нарисована, а только линейка приложена к доске. Но этого шага мало. Надо выбрать, после того, как уже начались занятия по геометрии, один-два урока для беседы с учащимися по поводу наблюдаемых всюду границ, о трех родах границ и т. д., как это изложено в nn°8 и 3. Нет сомнений — учащиеся легко понимают содержание такой беседы. Однако, не следует, как к этому привыкли, относиться к этой беседе, как к чему-то такому, что подлежит запоминанию со стороны учеников и что будет с них „спрашиваться“ в следующий раз. Нет, беседа так и должна остаться беседою, и лишь иногда в дальнейшем, когда в том встретится надобность, потребуется вспоминать ту или иную часть этой беседы.

То отступление, о котором замечено выше, относится к углам. Учащиеся среди углов выделяют особенный, выпрямленный, замечают, что каждый угол делит плоскость на 2 области, но, по-

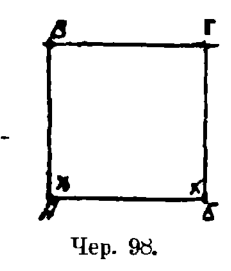
пожалуй, преждевременно для таких учащихся разделять углы на меньшие выпрямленного и большие выпрямленного. Приходится, благодаря этому, прибегнуть к приему, который, в сущности, по своей мысли неправилен, а именно — всегда присоединять к углу ту часть плоскости, которую представляется нам возможным уместить целиком на другой (которая „меньше") — этим самым, следовательно, ограничивается работа учащихся лишь углами, меньшими выпрямленных. Конечно, если кто-либо из преподавателей чувствует себя в силе сделать так, чтобы учащимся сделалась ясной возможность присоединять к углу или ту или иную из двух получаемых областей и тем самым ввести сразу в сознание учащихся как углы, меньшие выпрямленного, так и углы, большие выпрямленного, то можно только было бы приветствовать такую постановку дела.

Вся работа по усвоению действий над отрезками и углами ведется так же, как то описано в n°8, за тем лишь исключением, что для перенесения отрезка с одного места на другое приходится употреблять не циркуль, а бумажную линейку, на которой удобно отмечать концы переносимого отрезка карандашом, а для перенесения углов приходится вырезывать из бумаги модель переносимого угла.

Необходимо, помимо сложения и вычитания отрезков и углов, ввести еще деление отрезка и угла пополам. Деление отрезка пополам выполняется при помощи бумажной линейки: концы отрезка отмечаются на линейке, а потом последняя перегибается так, чтобы отмеченные концы совпали. Деление угла пополам выполняется при помощи „угла", вырезанного из бумаги: эта модель угла перегибается так, чтобы стороны угла совпали друг с другом. Учащиеся могут затем получить перегибанием любого куска бумаги модель выпрямленного угла, а вторичным перегибанием разделить выпрямленный угол пополам и получить половину выпрямленного угла или прямой угол. Таким образом в руках у каждого ученика окажется модель прямого угла, и каждый ученик, прикладывая ее к листу бумаги или к доске и обводя стороны этого угла, будет иметь возможность утверждать, что он умеет получать, умеет строить прямой угол.

Построение квадрата выполняется в таком порядке (чер. 98): строится отрезок *АБ* (для начальной школы, чтобы не создать лиш-

них затруднений, предпочтительнее употреблять для обозначений точек большие русские, а не латинские буквы), при концах его строятся прямые углы (отмечены крестиками), на сторонах этих углов откладываются при помощи бумажной линейки отрезки *АВ* и *БГ*, равные отрезку *АБ*, концы этих отрезков *В* и *Г* соединяются отрезком *ВГ*. Полученной фигуре дается название „квадрат". Изучение квадрата возможно в следующих направлениях: 1) мы строили $АБ = АВ = БГ$, — возникает вопрос об отрезке *ВГ*: не равен ли он остальным трем сторонам квадрата? 2) Мы строили углы при точках *А* и *Б* прямые — возникает вопрос: не прямые ли углы получились и при точках *В* и *Г*? 3) Если в предыдущем учащиеся ознакомились до некоторой степени с параллельностью прямых, то возникает вопрос: не параллельны ли стороны *АБ* и *ВГ* или *АВ* и *БГ*?



Чер. 98.

По поводу первых двух вопросов имеет место следующее. В сущности, то построение, которое пришлось выполнить для получения квадрата, покоится на симметрии, и если удастся достигнуть того, чтобы ученики чувствовали эту симметрию и осознали, что роль прямой *АБ* для нашей фигуры совершенно такая же, как и роль прямой *ВГ*, то тогда должна явиться уверенность в том, что 1) $ВГ = АБ$ и что 2) углы при *В* и *Г* также прямые. Если же эта симметрия не чувствуется учениками, то придется остановиться только на положении, что, п о в и д и м о м у, сторона $ВГ = АБ$ (так приблизительно выходит, если сравнить эти отрезки при помощи бумажной линейки) и что, п о в и д и м о м у, углы при *В* и *Г* прямые (так приблизительно выходит при сравнении этих углов с моделью прямого угла).

Что касается параллельности сторон квадрата, то, если в предыдущем учащиеся были ознакомлены с понятием о параллельных прямых, хотя бы лишь в том смысле, что они смогли представить себе возможность случая, когда две прямые, сколько бы мы их ни продолжали, не пересекаются, и здесь та же симметрия квадрата подскажет учащимся, что надо думать, что противоположные стороны квадрата параллельны.

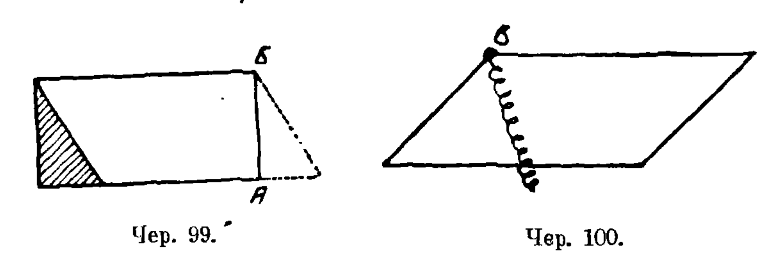
Совершенно аналогично этому развивается построение и изучение прямоугольника.

25. Детали курса геометрии в 4-ый год обучения.

Главное содержание этого года, согласно вышеизложенному плану, сводится к сообщению практических сведений. Сделаем по поводу входящих сюда вопросов только несколько замечаний.

Переход от измерения площади прямоугольника к площади параллелограмма удобно сделать так (чер. 99): отрежем от площади прямоугольника (его надо иметь вырезанным из бумаги) кусок (затушеванный) и приставим его к противоположной стороне.

При точке *А* должен получиться выпрямленным угол — и ученикам это ясно, потому что здесь складываются 2 прямых угла. Получаем параллелограмм (чер. 100). Придется ввести понятие о высоте параллелограмма. Здесь она совпадает с разрезом *БА*. Затем



Чер. 99. Чер. 100.

выполняем обратный переход: начинаем с параллелограмма, опять-таки вырезанного из бумаги, строим его высоту, для чего удобно воспользоваться бичевкой, укрепленной, например, в точке *В*, которую вращаем вокруг этой точки, пока бичевка не образует прямой угол со стороной параллелограмма, что узнается при помощи модели прямого угла; отрезаем полученный треугольник и приставляем его к противоположной стороне параллелограмма — получаем прямоугольник. Во время этих операций явится легкая возможность установить „рецепт" для вычисления площади параллелограмма. Слабым пунктом этой работы, благодаря чему значение ее для геометрического развития учащихся невелико, является некоторая туманность в вопросе о происхождении параллелограмма: не имея отчетливых сведений о параллельности прямых,

о свойствах углов при параллельных, о построении параллельных прямых, учащиеся не могут себе уяснить ни построения, ни даже происхождения параллелограмма — получение его из прямоугольника отрезанием и перенесением куска его площади (как выше указано) слишком недостаточно.

Переход к измерению площади треугольника обычный: диагональ параллелограмма делит площадь его пополам и образует со сторонами два равных треугольника. Если учащиеся привыкли к параллелограмму, то они „чувствуют“ некоторую его симметрию, благодаря которой диагональ со сторонами образует равные треугольники. Однако, сделать сознание этой симметрии отчетливым является задачею вряд ли выполнимою для маленьких учеников, почему опять-таки и эта работа не имеет большого геометрического значения.

Способы сообщения учащимся, как вычислять площадь трапеции, длину и площадь круга, здесь излагать не будем, так как их можно найти в любом руководстве для пропедевтического курса геометрии, а также в моем „Начальном курсе геометрии“. Повторяю, что по поводу измерения длины круга ошибочно мнение, будто бы к числу $3\frac{1}{7}$ или 3,14 можно притти опытным путем, измеряя при помощи тесемки (или иным приемом) длину деревянного, металлического круга, изготовленного мастером, и сравнивая эту длину с длиною поперечника. Следует здесь стать на такую точку зрения: сообщаем сразу ученикам, что удалось узнать, что всегда длина круга больше длины диаметра приблизительно в $3\frac{1}{7}$ (или 3,14) раза, после чего можно выполнить и несколько опытов, причем эти опыты должно рассматривать лишь, как мнемоническое средство для закрепления в памяти сообщенного сведения.

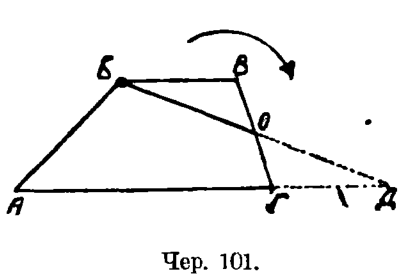
Замечу также, что на протяжении предыдущих работ может появиться случай, удобный для сообщения ученикам того, что сумма внутренних углов треугольника всегда составляет выпрямленный угол. Удобно связать это сведение с измерением углов градусами и дать здесь ряд практических упражнений, которые также явятся средством, помогающим запомнить сообщенное

свойство треугольника. Непреложность этого свойства не может быть *ясна* учащимся, не изучавшим свойства параллельных прямых.

Построение сетки куба (а также прямоугольного параллелепипеда) и получение из нее самого куба—слишком известная вещь, и на ней здесь останавливаться не приходится.

26. Замечания по поводу курса геометрии в 5-ый год обучения.

Как уже было указано, необходимым условием хорошей постановки курса этого года является возможность дать в руки каждому ученику циркуль. Работа начинается с изучения курса и с построения угла, равного данному—характер этой работы таков же, как то изложено в n°10. Так же точно построение и изучение параллельных прямых, треугольников, их равенства, параллелограммов и т. д. должно вестись в полном согласии с тем, что изложено в nn° 11—13. На протяжении этой работы можно вспомнить те операции, какие проделывались с площадями параллелограмма, треугольника и трапеции для отыскания способов их вычисления в предыдущий год обучения; теперь явится возможность привести в отчетливость те неясные интуиции, какие там имели место (см. n°25). Напр., возьмем трапецию *АБВГ* (чер. 101). Очень удобным приемом для выяснения вопроса об измерении ее площади является таковой: 1) разделим сторону *ВГ* в точке *О* пополам; 2) построим отрезок *БО* и отрежем треугольник *БВО* (трапеция вырезана из бумаги); 3) повернем △ *БВО* около точки *О* (по стрелке) так, чтобы он занял положение *ДГО*.



Чер. 101.

В предыдущий год обучения оставалось невыясненным, правда ли, что фигура *АБОДГ* есть треугольник, т.-е., правда ли, что линия *АГД*—прямая? Правда ли, что линия *БОД*—прямая? Теперь, пользуясь знанием равенств углов при параллельных и секущей, равенством вертикальных углов (это равенство можно было разо-

брать и раньше 5-го года обучения), а также признаками равенства треугольников, явится возможность привести в отчетливость все то, что было лишь неясною интуициею в предыдущем.

Изучение свойств равнобедренного треугольника возможно, как уже то замечено выше, перенести из 5-го года в 4-ый год. Очень удобным приемом для его изучения является возможность получать всевозможные равнобедренные треугольники при помощи модели прямого угла. Если мы имеем модель прямого угла, полученную при помощи двухкратного сгибания куска бумаги, то, построив прямую линию, как-либо рассекающую стороны прямого угла, обрезав кусок бумаги по этой прямой и разогнув его так, чтобы кусок бумаги остался перегнутым лишь один раз, мы получим равнобедренный треугольник. И из этого способа получения его сразу видны свойства: 1) углы при основании равны; 2) линия перегиба перпендикулярна к основанию; 3) линия перегиба делит основание пополам; 4) линия перегиба делит угол при вершине пополам; 5) линия перегиба делит площадь треугольника пополам — одним словом, линия перегиба есть ось симметрии всей фигуры.

Нет надобности останавливаться на деталях других вопросов этой части курса (например, на построении перпендикуляра, делении угла и отрезка пополам построением циркулем и линейкою, о выяснении понятия о расстоянии между двумя точками, между точкою и прямою и т. д.) — все это надо вести в согласии с изложенным в отделе II, пользуясь лишь, где это возможно, симметриею получаемых построений.

Что касается вопросов о прямых и плоскостях в пространстве, то является возможность выяснить все особенности, имеющие здесь место, при помощи модели куба и его образовании из построенной сетки куба перегибанием по сторонам квадратов, составляющих сетку куба. Повторяю, что для достижения хороших результатов, как в этом вопросе, так и в вопросе о геометрических местах точек, необходимо, чтобы учитель сам детально разобрал бы все частные вопросы, сюда входящие, для чего обращаю его внимание прежде всего на мой „Начальный курс геометрии“, а затем и на мою „Геометрию в пространстве.

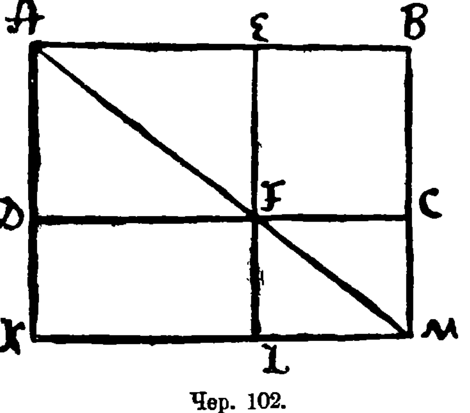
ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Равновеликие параллелограммы Евклида.

На стран. 103 (чер. 73) дано построение равновеликих параллелограммов, имеющееся у Евклида. Этим построением можно пользоваться для решения различных задач на превращение параллел-ма или прямоугольника в равновеликий ему, удовлетворяющий известным требованиям.

Например, легко решается, без сведения дела к измерению, задача: построить прямоугольник, равновеликий данному и имеющий данное основание (обычно, опираясь на знание того, что площадь прямоугольника равна произведению основания на высоту, задачу сводят к построению 4-го пропорционального отрезка).

Решение этой задачи, без сведения к алгебре, таково: пусть $ABCD$ (чер. 102) — данный прямоугольник; отложив отрезок AE, равный данному основанию искомого прямоугольника, и построив $EL \parallel AD$, а затем прямую AF, где F точка пересечения EL с DC, и построив $MK \parallel BA$ (точка M есть точка пересечения BC и AF), получим прямоугольник $ABMK$, из которого видим, что прямоугольник $AELK$ имеет данное основание AE и равновелик данному прямоугольнику $ABCD$.



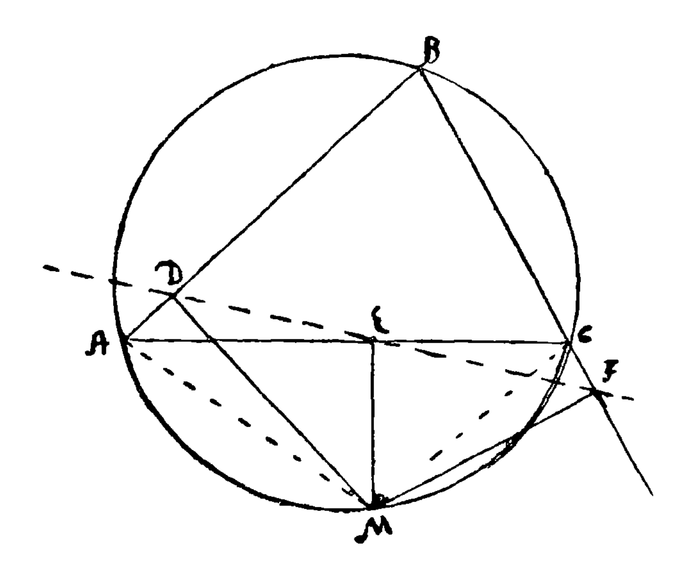
Чер. 102.

Это решение задачи было давно известно, хотя и не пользуется распространением. Под его влиянием может возникнуть мысль изыскать решение, построенное на той же

идее, другой общеизвестной задачи: построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

Предварительно надо ознакомиться с так называемой „прямой Симсона".

Если в круг вписан треугольник ABC (чер. 103) и если из какой-либо точки M окружности построены перпендикуляры MD, ME и MF на его стороны, то, как известно, основания этих



Чер. 103.

перпендикуляров, точки D, E и F, лежат на одной прямой, называемой „прямая Симсона".

Вот выяснение этого.

Угол ADM — прямой; следов., точка D лежит на окружности, диаметром которой служит отрезок AM. Так как $\angle AEM$ тоже прямой, то точка E лежит на той же окружности. Поэтому углы AMD и AED суть углы, вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу AD (она на чертеже не дана). Следов., $\angle AED = AMD$.

Так как $\angle MEC = d$ и $\angle MFC = d$, то точки E и F лежат на окружности, диаметром которой служит отрезок MC, и углы

CMF и CEF суть вписанные в эту окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу CF (не нарисованную на чертеже). След., $\angle CEF = \angle CMF$.

Так как четыреугольник $MABC$ вписан в круг, то $\angle AMC + \angle B = 2d$.

Так как углы при точках D и F в четыреугольнике $MDBF$ прямые, то этот четыреугольник есть вписываемый и, следов., $\angle DMF + \angle B = 2d$.

Отсюда мы выводим, что $\angle AMC = \angle DMF$. Так как $\angle AMC = \angle AMD + \angle DMC$ и $\angle DMF = \angle DMC + \angle CMF$, то отсюда имеем:

$$\angle AMD + \angle DMC = \angle DMC + \angle CMF$$

или

$$\angle AMD = \angle CMF.$$

Но мы получили, что $\angle AED = \angle AMD$ и $\angle CEF = CMF$. Следов., $\angle AED = \angle CEF$.

Так как AEC есть прямая линия, то равенство углов AED и CEF указывает на то, что DEF есть также прямая линия.

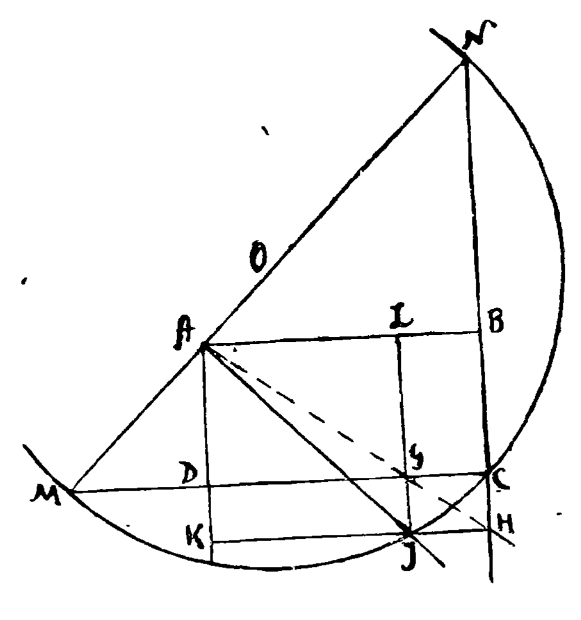
Известна и обратная теорема: если из какой-либо точки плоскости треугольника опущены перпендикуляры на его стороны и если их основания расположены на одной прямой, то указанная точка расположена на окружности, описанной около треугольника.

Выяснение этого немногим отличается от предыдущего. Мы теперь не знаем, что четыреугольник $ABCM$ есть вписываемый, но зато знаем, что DEF есть прямая и, следовательно, $\angle AED = \angle CEF$. Так как попрежнему точки A и E лежат на окружности, диаметром которой служит отрезок DM, и точки E и F лежат на окружности, диаметром которой служит отрезок MC, то попрежнему имеем: $\angle AED = \angle AMD$ и $\angle CEF = \angle CMF$.

Отсюда заключаем, что $\angle AMD = \angle CMF$. Так как четыреугольник $MDBF$ попрежнему вписываемый (ибо углы при D и F прямые), то $\angle DMF + \angle B = 2d$ или $\angle DMC + \angle CMF + \angle B = 2d$ или $\angle DMC + \angle AMD + \angle B = 2d$ или $\angle AMC + \angle B = 2d$, откуда и заключаем, что точка M лежит на круге, описанном около $\triangle ABC$.

Пусть $ABCD$ (чер. 104) есть данный прямоугольник и $ALJK$ — искомый квадрат. Тогда вершина J этого квадрата должна ле-

жать на биссекторе AJ прямого угла A данного прямоугольника. Далее искомая точки J должна заиять на этом биссекторе такое положение, чтобы точка A, G и H лежали на одной прямой. Точки G и H суть основания перпендикуляров, опущенных из точки J на прямые DC и BC. Тогда возникает мысль применить сюда „прямую Симсона". Примем прямыя DC и BC за 2 стороны треугольника, третьею же его стороною должна быть прямая, пер-



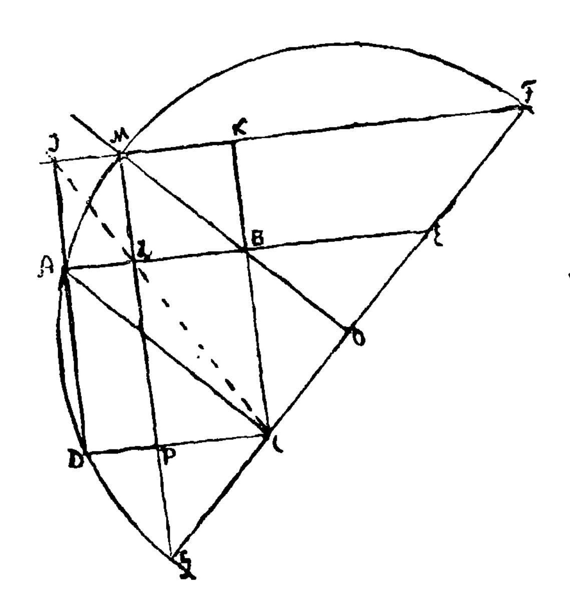
Чер. 104.

пендикулярная к AJ. Эта прямая MN легко строится. Получим $\triangle MCN$. Тогда, согласно обратной теореме о „прямой Симсона", точка J должна лежать на окружности, описанной около $\triangle MCN$. Центр O этой окружности (ибо $\angle MCN$ прямой) должен лежать в середине отрезка MN. Раз точка J определена, то построение квадрата $KJLA$ не вызывает затруднений.

Та же идея может быть применена к задаче деления отрезка в крайнем и среднем отношении. Если дан отрезок AB, то задача сводится к разделению этого отрезка на такие две части AL

и LB, чтобы квадрат, построенный на большей из них, на отрезке LB, был равновелик прямоугольнику, сторонами которого служат сам отрезок AB и другая часть его, именно AL.

Пусть (чер. 105) квадрат $LMKB$ равновелик прямоугольнику $ALPD$, причем $AD = AB$. Продолжив стороны этого квадрата и прямоугольника, получим прямоугольник $DJKC$ и квадрат $DABC$, причем точки C, L и J должны лежать на одной прямой, на диагонали прямоугольника $DJKC$. Построив диагональ AC, мы



Чер. 105.

увидим, что точки J, L и C можно рассматривать, как основания перпендикуляров, построенных из точки A на стороны $\triangle GMF$, причем сторона GF есть прямая, перпендикулярная к AC. Из этого следует, что $\angle DCG = 45^0$, а, следовательно, $\angle MGC = 45^0$ и $\angle MFG = 45^0$. Также $\angle BCE = \angle BEC = 45^0$ (точка E есть точка пересечения продолжения AB с прямою GF).

Точка A должна лежать, согласно обратной теореме о „прямой Симсона", на окружности, описанной около $\triangle GMF$, а центр O этой окружности должен лежать в середине отрезка CE,

откуда вытекает построение для определения точки M: 1) строим на AB квадрат $ABCD$ и его диаг. AC, 2) строим через точку C прямую $GF \perp AC$, — тогда определится точка E, 3) делим отрезок CE пополам в точке O, 4) строим прямую через O и B. — эта прямая образует со сторонами BC и AB углы в 45° (ибо $\triangle CBE$ равнобедренный), 5) строим окружность, принимая точку O за центр и OA (или OD) за радиус, — пересечение этой окружности с прямою OB определит точку M. Раз точка M определена, то, построив $MLP \perp AB$, соединив M с F и продолжив CB до пересечения в точке K с MF, получим квадрат $LMKB$ (так как диагональ BM составляет со сторонами BL и BK углы по 45°), равновеликий прямоугольнику $ALPD$, что и дает решение задачи.

ПРИЛОЖЕНИЕ II.

Одна из работ повторительного характера.

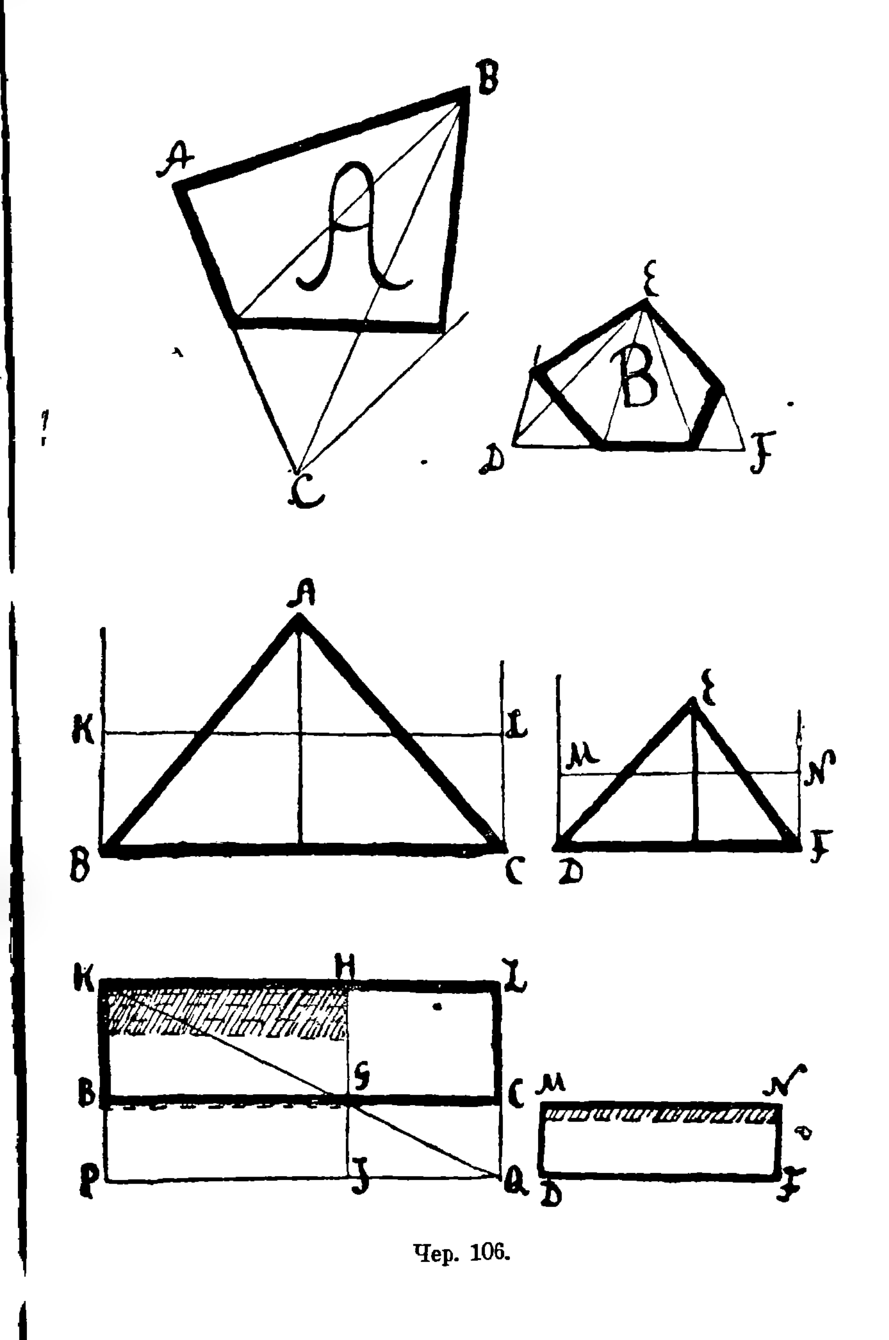
Допустим, что учащиеся уже знакомы с геометрическим учением о площадях, ограниченных прямыми линиями. Тогда, после изучения вопросов, связанных с измерением прямолинейных отрезков, они сами приходят к заключению, что если даны две площади A и B, ограниченные прямыми линиями, то возможно измерить площадь A площадью B, т.-е., другими словами, возможно составить уравнение вида $A = kB$. В самом деле, в силу нашего допущения учащиеся уже знакомы с признаками равенства площадей (две площади равны, когда 1) они совпадают при наложении, 2) они являются суммами одинакового числа слагаемых площадей, попарно совпадающих при наложении, и 3) они являются разностями площадей, попарно совпадающих при наложении), могут, преобразовав каждую из данных площадей, узнать, какая из них больше другой, и отложить меньшую на большей; знакомы они также и со сложением двух площадей [1]). Для учащихся явится хорошею работою, повторительного характера, проделать все вышеуказанное на каком-нибудь примере.

Так как с одной стороны наш обычный курс геометрии в средней школе игнорирует геометрическое изучение площадей, а, с другой стороны, вопрос об измерении излагается в крайне несовершенном виде, я позволю себе в настоящей статье дать пример такой работы, в надежде, что он поможет убедить в необходимости введения в курс геометрии чисто-геометрического изучения площадей.

Пусть даны две площади A и B (см. 1-й ряд чертежа 106, где данные площади очерчены более толстыми линиями) и тре-

---

[1]) Конечно, в этой статье все время идет речь о площадях, ограниченных прямыми линиями.



Чер. 106.

буется измерить площадь A площадью B: площадь A представляет собою площадь четыреугольника, а площадь B — площадь пятиугольника. Преобразуем эти многоугольники в равновеликие им треугольники (на чертеже это сделано), — получим, что площадь A = площади $\triangle ABC$ и площадь B = площади $\triangle DEF$ [1]). Эти треугольники для удобства перенесем на другое место (2-й ряд чертежа). Каждый из этих треугольников превратим в равновеликие им прямоугольники, — на чертеже это сделано (площ. $BKLC$ = площ. $\triangle ABC$ и площ. $DMNF$ = площ. $\triangle DEF$). Далее превратим один из полученных прямоугольников в равновеликий ему с таким же основанием, как у другого. На чертеже, полученные раньше два прямоугольника перенесены в 3-й ряд и один из них, а именно $BCLK$, преобразован в равновеликий ему прямоугольник $PJHK$ так, что основание его PJ равно основанию DF прямоугольника $DMNF$.

Так как последнее преобразование мало известно, то поясню его. Отложим $KH = BG = DF$ и построим прямые KBP, HGJ, LCQ. Затем построим еще прямую KG, которую продолжим до пересечения в точке Q с прямой LC. Наконец, через точку Q строим прямую $QP \parallel CB$. Тогда KQ есть диагональ прямоугольника $PKLQ$; следовательно, $\triangle KLQ = \triangle PKQ$. На том же основании $\triangle KGH = \triangle BKG$ и $\triangle GCQ = \triangle JGQ$. Вычитая из площади $\triangle KLQ$ площадь $\triangle KHG$ и площадь GCQ, получим площадь $GHLC$. Вычитая из площади $\triangle PKQ$ площадь $\triangle BKG$ и площадь $\triangle JGQ$, получим площадь $PBGJ$. Так как из равных площадей вычитались равные, то площ. $PBGJ$ = площ. $GHLC$. Если теперь к каждой из них прибавим площ. $BKHG$, то получим, что площадь $PKHJ$ = площади $BCLK$, т.-е. удалось преобразовать прямоугольник $BCLK$ в равновеликий ему $PJHK$ так, что основание PJ нового треугольника = DF, т.-е. основанию прямоугольника $DFNM$ (в самом деле $PJ = BG = KH$, а KH и BG отложены равными DF).

Теперь мы имеем:

1) A = площ. $PJHK$ и 2) B = площ. $DFNM$. Накладывая прямоугольник $DFNM$ на прямоугольник $PJHK$ (а это легко

---

[1]) В первом ряду чертежа не дана (случайно) прямая линия EF.

сделать, так как у них основания равны), мы 1) легко узнаем, какая из данных площадей (A или B) больше другой, и 2) если пожелаем, можем получить, хотя бы приближенно, желаемое уравнение. Для примера, данного на чертеже, имеем:

$A = 2B + C$ (A = пл. $PJHK$, B = пл. $DFNM$, C есть оставшаяся часть площади прямоугольника $PJHK$, затушеванная на чертеже).

$B = C + D$ (D есть оставшаяся часть площади прямоугольника $DFNM$, затушеванная на чертеже).

Пусть C = прибл. $4D$.

Тогда B = прибл. $5D$, A = прибл. $14D$ и A = прибл. $2\frac{4}{5}$ B.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1924 ГОД

на общепедагогический журнал для учителей и деятелей по народному образованию.

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ



7-й год издания (выходит с 1918 г.).

Издательство БРОКГАУЗ-ЕФРОН

Редакция: **И. С. СИМОНОВ и И. М. ГРЕВС.**

Ближайшее участие в журнале принимают: *С. И. Абакумов, Н. А. Альмединген, Н. П. Анциферов, С. П. Аржанов, Н. Н. Бахтин, А. П. Болтунов, А. А. Борзов, Н. Л. Бродский, В. П. Буданов, В. Н. Верховский, И. И. Грацианский, Я. Я. Гуревич, Д. А. Жаринов, П. А. Знаменский, Г. Г. Зоргенфрей, Н. А. Извольский, С. В. Иванов, И. Н. Кавун, А. М. Калмыкова, Н. П. Каменьщиков, Н. И. Кареев, Н. В. Кашин, А. А. Крогиус, К. М. Лепилов, А. К. Линдеберг, А. Л. Липовский, Н. М. Мендельсон, А. П. Нечаев, С. А. Павлович, Я. И. Перельман, С. А. Переселенков, С. А. Петров, И. П. Плотников, И. И. Полянский, А. Е. Пресняков, М. Д. Приселков, Б. Е. Райков, А. С. Рождествин, М. М. Рубинштейн, Н. А. Саввин, В. И. Селинов, Л. Д. Синицкий, И. А. Сигов, Н. С. Соболев, Н. М. Соколов, Н. Э. Сум, Г. Г. Тумим, А. П. Флеров, Л. В. Щерба, К. П. Ягодовский, Е. Н. Янжул, А. Г. Ярошевский, А. А. Яхонтов.*

—

Подписная цена на год (5 книг) 3 руб. зол. без пересылки. За пересылку 60 коп. Розничная продажа производится в конторе журнала и во всех книжных магазинах Петрограда и Москвы.

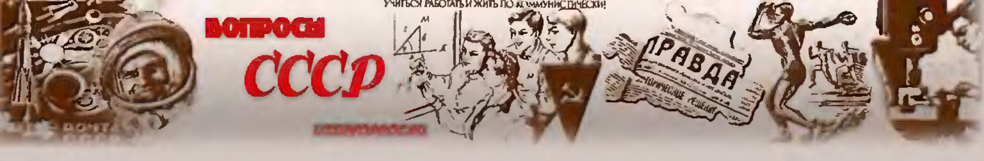
Цена отдельной книги 80 коп.

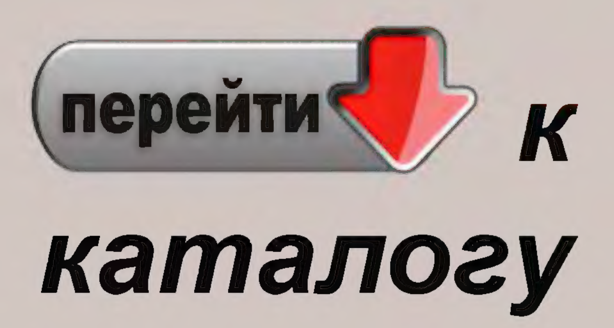
Адрес конторы и редакции: **Петроград, Прачешный пер., д. 6.**

Контора открыта ежедневно (кроме воскресных и праздничных дней) от 11 до 4 час. дня. Тел. 553—92.

Склад издания в Москве: „Международная Книга“ — Кузнецкий мост, 12. Тел. 296—21.

Каждый выпуск будет представлять *законченный* сборник статей (включая критику, библиографию и хронику).


УЧИТЬСЯ РАБОТАТЬ И ЖИТЬ ПО КОММУНИСТИЧЕСКИ!
ВОПРОСЫ
СССР
ПРАВДА


перейти